Sats. *Antag att f och g är funktioner så att* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *och* $\lim_{x\to a} g(x) = M$*. Då gäller det att* $\lim_{x\to a} fg = LM$*.*

Bevis. Vi vill visa att om vi får ett $\epsilon > 0$, så kan vi hitta ett $\delta > 0$ så att om

$$0 < |x - a| < \delta$$

så gäller

$$|f(x)g(x) - LM| < \epsilon.$$

Det är rimligt att skriva om uttrycket $fg - LM$ så att det ser mer ut som $f - L$ eller $g - M$, eftersom där har vi information att tillgå. Notera att vi inte alltid skriver ut variabeln x eftersom uttryckena lätt blir onhanterliga. En möjlig omskrivning ges i alla fall av

$$fg - LM = M(f - L) + L(g - M) + (f - L)(g - M).$$

Vi kan nu tillämpa triangelolikheten, $|a + b| \leq |a| + |b|$, och vi får att

(1) $$|fg - LM| \leq |M||f - L| + |L||g - M| + |f - L| \cdot |g - M|.$$

Låt $\epsilon_1 > 0$ vara det positiva tal så att $\epsilon = \epsilon_1^2 + (|L| + |M|)\epsilon_1$. Eller med andra ord, så sätt $\epsilon_1 = -\frac{|L|+|M|}{2} + \sqrt{\frac{|L|+|M|}{2}^2 + \epsilon}$. Eftersom $\lim_{x\to a} f(x) = L$, så finns det nu ett $\delta' > 0$ så att om $0 < |x - a| < \delta'$ så är $|f - L| < \epsilon_1$. Detta är helt enkelt vad $\lim_{x\to a} f(x) = L$ betyder. På samma sätt finns ett δ'' så att om $0 < |x - a| < \delta''$ så är $|g - M| < \epsilon_1$. Om vi sätter $\delta = \min(\delta', \delta'')$, så finner vi att om $0 < |x - a| < \delta$ så är så klart både $0 < |x - a| < \delta'$ och $0 < |x - a| < \delta''$, så vi har

(2)
$$|f(x) - L| + |g(x) - M| + |f(x) - L| \cdot |g(x) - M| < \epsilon_1^2 + (|L| + |M|)\epsilon_1 = \epsilon.$$

Men det senare uttrycket är vårt uttryck för ϵ. Om vi kombinerar (1) och (2) så kan vi sammanfattningsvis sluta oss till att om $0 < |x - a| < \delta$ så är $|f(x)g(x) - LM| < \epsilon$. Vi har alltså hittat vårt δ, och satsen är bevisad. □