INVERSA OCH IMPLICITA FUNKTIONSSATSEN

Innehåll

1. Inversa funktionssatsen

Sats (Inversa funktionssatsen)**.** *Antag att $f : I \to \mathbb{R}$ är en injektiv funktion definierad på ett intervall $I = (a, b)$. Antag att f är differentierbar på intervallet I och att f' är kontinuerlig. Om $v = f(u)$ och g betecknar inversen f^{-1} till f, så gäller det att:*

- *g är deriverbar i v, om $f'(g(v)) \neq 0$.*
- *$g'(v) = \frac{1}{f'(g(v))}$.*

Bevis. För att visa påståendet måste vi betrakta uttrycket för definitionen av derivatan för g i punkten v, nämligen:

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(v+h) - g(v)}{h}.$$

Att g är invers till f innebär att $f(g)(x) = x$. Det innebär speciellt att $f(g(x+h)) = x + h$ och $f(g(x)) = x$ så att om $x = u$ så har vi $h = (v+h) - v = f(g(v+h)) - f(g(v))$. Notera att eftersom $f(u) = v$ så är $g(v) = u$

Nu är det också vettigt att skriva $k = g(v+h) - g(v)$, dvs. $g(v+h) = g(v) + k$. Insättning av dessa uttryck i definitionen av derivata ger oss efter en enkel manipulation

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(v+h) - g(v)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k}{f(u+k) - f(u)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\frac{f(u+k) - f(u)}{k}}.$$

Om vi skulle kunna byta ut h mot k i gränsvärdet erhåller vi satsen. Eftersom $k = g(v+h) - g(v)$ skulle detta följa av att g är kontinuerlig (om h går mot noll måste k gå mot noll). Om vi redan visste att g var deriverbar skulle detta så klart följa av att alla deriverbara funktioner är kontinuerliga, men vi har varken visat eller antagit detta.

Resten av beviset handlar om att visa att g är kontinuerlig i v. För detta visar jag först att f måste vara strikt växande eller strikt avtagande. Detta följer från faktumet att f' existerar och aldrig kan byta tecken. Om f' bytte tecken runt u skulle det innebära att f' skulle vara noll runt u, på grund av satsen om mellanliggande värden för kontinuerlig funktioner, och på grund av att vi antagit att f' är kontinuerlig. Se satsen nedanför för ett bevis av påståendet att positiv derivata ger strängt växande funktioner.

I resten av beviset antar jag att $f(x)$ är strikt växande, i vilket fall $g(x)$ också är strikt växande. Per definition har vi att $a < g(x) < b$. Speciellt för ett givet x_0 kan vi alltid hitta ett ϵ så att $0 < g(x_0) - \epsilon < g(x_0) < g(x_0) + \epsilon < b$, där vi använder att $g(x)$ är strikt växande enligt antagande. Om vi tillämpar f på detta får vi att

$$f(g(x_0) - \epsilon) < f(g(x_0)) = x_0 < f(g(x_0) + \epsilon).$$

Välj nu

$$\delta = \min\{x_0 - f(g(x_0) - \epsilon), f(g(x_0) + \epsilon) - x\}.$$

Då gäller att om

$$f(x_0) - \delta < x < f(x_0) + \delta$$

så är

$$f(x_0 + \epsilon) < x < f(x_0 + \epsilon).$$

Eftersom g är strikt växande får vi

$$g(x_0) - \epsilon < g(x) < g(x_0) + \epsilon$$

om $|x - x_0| < \delta$. Detta är det som skulle visas. □

Sats. *Om f är deriverbar och $f' > 0$ så är f strikt växande.*

Om f är deriverbar och $f' < 0$ så är f strikt avtagande.

Bevis. Detta följer i princip från definition, och det första påståendet är lika svårt som det andra. Vi visar det första. Om

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = L > 0$$

så betyder det att

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = L > 0$$

och

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = L > 0.$$

Enligt gränsvärdesdefinition, i det första fallet, om vi tar $\epsilon = L/2$, så finns ett δ så att om $0 < h < \delta$ så är

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - L \right| < L/2.$$

Notera att jag inte skriver $0 < |h| < \delta$ eftersom jag betraktar ett högergränsvärde så $h > 0$ per automatik. Från olikheten sluter vi oss i alla fall att för små h så är $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ på högst avstånd $L/2$ från L och måste då vara positivt själv. Men om vi multiplicerar olikheten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$ med $h > 0$ bevaras olikheten och vi får att $f(x+h) > f(x)$. En analys av vänstergränsvärde hade gett samma resultat.

I ord kan man sammanfatta delar av argumentet med att att om $h > 0$ och är väldigt litet så är $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$.

$\square$

2. Implicita funktionssatsen

Sats (Implicita funktionssatsen)**.** *Antag att* $F(x, y) = 0$ *är en ekvation där* (a, b) *är en punkt så att* $F(a, b)$*. Skriv* F_y *för derivatan av* F *med avseende på* y *där vi betraktar* x *som en konstant. Om det gäller att* $F_y(a, b) \neq 0$ *kan vi skriva* $y = y(x)$ *för* x *nära* a*, och* y *är deriverbar i punkten* $x = a$*.*

Bevis. Bevis är lite komplicerat och använder mer än vad vi har möjlighet att gå igenom under kursen och utelämnas. $\square$