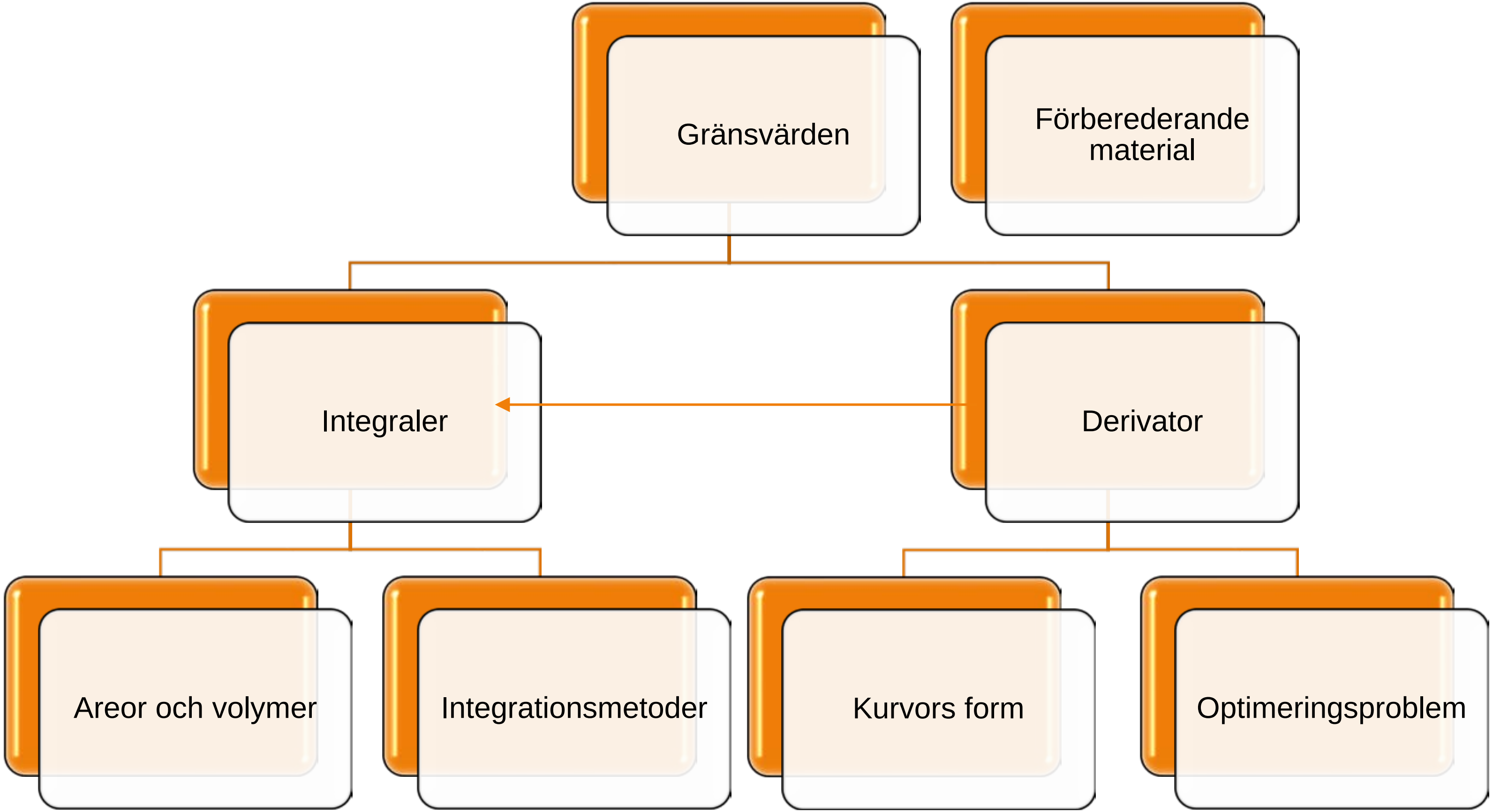
CHALMERS

MVE475 : Repetition


Gränsvärden
Förberederande material
Integraler
Derivator
Areor och volymer
Integrationsmetoder
Kurvors form
Optimeringsproblem

Förberedande material

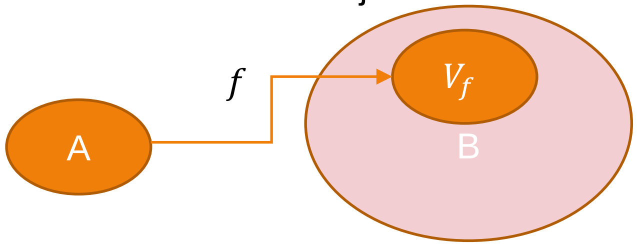
Funktioner, mängder och inverser

- För att uttrycka matematik är det ofta bra, för att förenkla skrivsätt, att introducera lite notation och övergripande begrepp.
- Vi tar avstamp i mängdläran, som handlar om mängder och funktioner mellan mängder.

Några standardmängder är heltalen och de reella talen, $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{R}$.

Ett element x i en mängd A betecknas $x \in A$.

En funktion $f\colon A \to B$ mellan två mängder är en regel som associerar till varje element $x \in A$ ett element i $b \in B$, som ofta betecknas $f(a)$.



Mängden A kallas *definitionsmängd*.

Mängden B kallas *målmängd*.

De element som f antar kallas *värdemängden*, V_f, en delmängd till B.

Om f är en funktion så att $f(x) = f(y)$ om och endast om $x = y$ kallas f *injektiv* (eller 1-till-1).

I det fallet finns för varje y i värdemängden exakt ett $f(x)$ så att $f(x) = y$. Vi definierar inversen av funktionen f som

$$f^{-1}(y) = x.$$

Många funktioner är naturligt injektiva, till exempel $y = kx + m$. Andra funktioner blir bara injektiva efter att vi gör definitionsmängden mindre. Till exempel är $f(x) = x^2$ injektiv för $x \geq 0$, och inversen brukar vi kalla kvadratroten till ett positivt tal.

Andra mer intrikata funktioner vars inverser vi studerat är $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$, vars inverser betecknas $\arccos(x), \arcsin(x), \arctan(x)$.

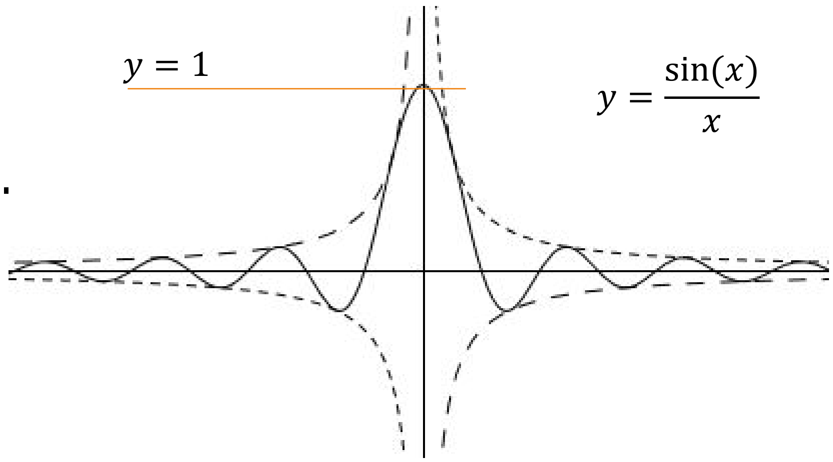
Kapitel 1

Gränsvärden och kontinuitet

- Gränsvärden är konceptet kopplat till frågan ”vad närmar sig en viss funktion”?

- $\lim_{x \to a} f(x) = L$ eller $f(x) \to L$ då $x \to a$.

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.



Gränsvärden och kontinuitet

Definition: Informellt säger vi att $f(x)$ går mot L då x går mot a om $f(x)$ är godtyckligt nära L om x är tillräckligt nära a.

Definition: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ om $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0,$ så att $0 < |x - a| < \delta$ medför att $|f(x) - L| < \epsilon$.

Gränsvärden och kontinuitet

- Notera att det *inte* är automatiskt i definitionen av gränsvärde att om $lim_{x \to a} f(x) = L$ så är $L = f(a)$.

- Detta är kopplat till kontinuitetsbegreppet.

Gränsvärden och kontinuitet.

Definition: Om $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ säger vi att f är kontinuerlig i a. f är *kontinuerlig* om f är kontinuerlig i hela definitionsmängden.

Definition: Om $\lim_{x \to a} f(x)$ ej existerar eller $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, så säger vi att f är *diskontinuerlig* i a

Kontinuitet motsvarar begreppet ”*jag kan rita en kurva utan att lyfta pennan*”. Detta är matematiskt sammanfattat i nedanstående sats.

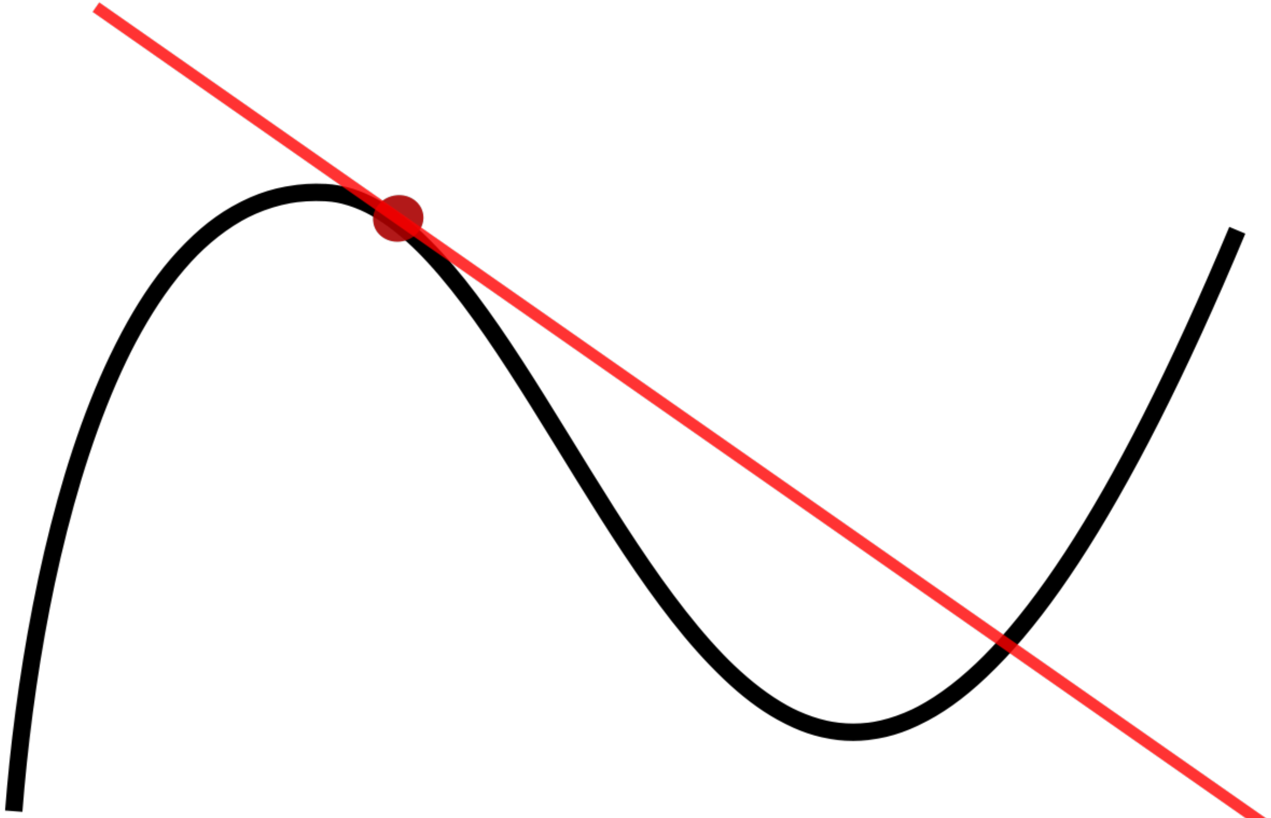
Satsen om mellanliggande värden: Antag att $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig. Då antar f alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$.

En variant av denna sats detta är att bilden av det slutna intervallet $[a,b]$ också är ett slutet intervall $[A,B]$.

Kapitel 2

Derivator

- Derivatan till en funktion mäter lutning på tangentlinjer till grafer till funktioner.
- Det är ett tal som beskriver geometrin, och alltså kopplar ihop *former* med *funktioner*.



Definition: En funktion säges vara deriverbar i x om gränsvärdet

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existerar.

Notera att definitionen använder *gränsvärdesbegreppet* från kapitlet innan, som nu ligger på mer solid mark.

Sats: Om f är deriverbar är f också kontinuerlig.

Alla vettiga funktioner i kursen är deriverbara så länge de är definierade.
De är också kontinuerliga.

Till exempel är alla polynom, exponentialfunktioner, trigonometriska funktioner deriverbara, logaritmer etc deriverbara.

Ett exempel på något som *inte* är deriverbart överallt är $f(x) = |x|$. Den är inte deriverbar i origo eftersom den har en ”spets” där. Den är dock kontinuerlig.

Tangenten i en punkt (a, b) på kurvan $y = f(x)$ ges av ekvationen

$$y - b = f'(a) \cdot (x - a).$$

Definition: Om f är deriverbar i a så kallar vi

$$L(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

för f i a.

Notera att $L(x)$ inte är annat än ekvationen för tangenten, eftersom $b = f(a)$ ovan. Ett av intressena för detta är att om x är nära a, så kommer $f(x)$ vara nära $L(x)$. Det hjälper oss att göra uppskattningar av $f(x)$ utifrån kända värden på $f(a)$ och $f'(a)$.

I det speciella fallet att $x = a$ är så klart $L(x)$ och $f(x)$ lika.

Kapitel 3

Deriveringsregler

- Finns flera typer av deriveringsregler.
- Bra att lära sig dessa utantill.
- Ofta måste flera av dessa kombineras för en enskild uppgift.

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
a^x	$\ln(a)\,a^x$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$f+g$	$f'+g'$
$f+c$	f'
f'	f''
$f^{(n)}$	$f^{(n+1)}$

Sats (produktregeln): Om f och g är deriverbara, så gäller det att

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Sats (kvotregeln): Om f och g är deriverbara, så gäller det att

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

Sats (kedjeregeln): Om f och g är deriverbara, så gäller det att

$$\left(f\big(g(x)\big)\right)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x).$$

En annan viktig regel är L'Hôpitals regel. Den ersätter en gräns av kvoter mellan två funktioner med deras derivator.

Observera att man *inte* ska ta derivatan av kvoten, den beräknas med kvotregeln som ger något helt annat.

L'Hôpitals regel: Låt a vara ett reellt tal eller ∞ . Antag $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ eller $\pm\infty$. Då gäller det att

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Kapitel 4

Tillämpningar av derivator

- Derivator har flera direkta tillämpningar.
- Många av dessa kommer från tolkningar av derivatan som lutning på en kurva.

Max-min problem: Antag att f är kontinuerlig på ett slutet intervall $[a, b]$. Då har f både globalt max och min i $[a, b]$. Dessa finns i någon av följande punkter:

- I ändpunkterna a eller b.
- I en punkt där f inte är deriverbar.
- I en punkt där $f'(x) = 0$.

Definition: Punkterna där f inte är deriverbar eller där $f'(x) = 0$ kallas *kritiska* punkter.

Sats (medelvärdessatsen): Antag att f är deriverbar i det inre till (a, b), och kontinuerlig på $[a, b]$.

Då gäller det att det finns ett $c \in (a, b)$ så att $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Denna fundamentala sats kopplar ihop värden på funktionen f i punkterna a och b med derivatabegreppet.

Några konsekvenser för kurvkonstruktion. Antag att för alla $x \in (a, b)$ så:

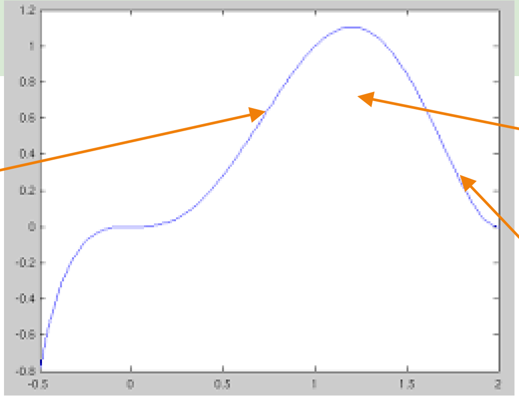
- $f'(x) > 0$. Då är f strängt växande på (a, b).
- $f'(x) < 0$. Då är f strängt avtagande på (a, b).

Några fler konsekvenser för kurvkonstruktion. Antag att för alla $x \in (a, b)$ så:

- $f'(x) > 0$. Då är f strängt *växande* på (a, b).
- $f'(x) < 0$. Då är f strängt *avtagande* på (a, b).

- Om $f''(x) > 0,$ så är $y = f(x)$ *konvex* (konkav uppåt).
- Om $f''(x) < 0,$ så är $y = f(x)$ *konkav* (konkav neråt).

- En *inflektionspunkt* är en punkt där andraderivatan ändrar tecken.



En inflektionspunkt

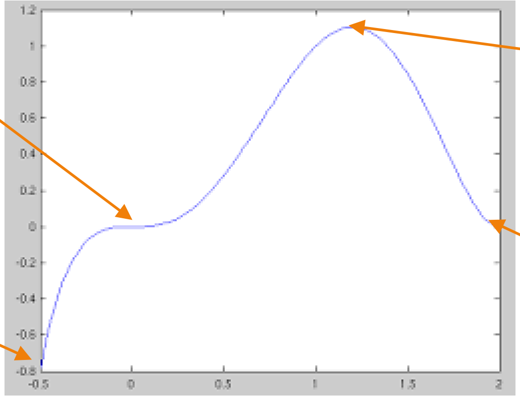
Negativ andraderivatan, konkav neråt

Negativ derivata, avtagande

Antag att vi har $f'(a) = 0$.

- Om $f''(a) > 0$ så är a ett lokalt minimum.
- Om $f''(a) < 0$ så är a ett lokalt maximum.
- Om $f''(a) = 0$ eller $f''(a)$ odefinierad så kan vi inte säga något speciellt om kurvans karaktär.

$f' = f'' = 0$, men varken max eller min



$f' = 0$, globalt maximum

Globalt minimum

Lokalt minimum

Grafritningen har vi också berikat med hjälp förståelse för asymptoter:

1. *Vertikala asymptoter*, då funktionen närmar sig $x = a$.
2. *Horisontella asymptoter*, då funktionen närmar sig $y = b$.
3. *Sneda asymptoter*, då funktionen närmar sig $y = kx + m$ om $x \to \pm\infty$. För dessa gäller:

- Lutningen k måste i så fall ges av formeln:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

- Värdet m ges i så fall av:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx = m.$$

Notera att horisontella asymptoter motsvarar $k = 0$. I en vag mening motsvarar vertikala asymptoter fallet då $k = \infty$.

Implicit derivering: Det finns också fall där vår graf inte är på den enkla formen $y = f(x)$. T.ex. kan vi tänka oss att kurvan är beskriven av $x^2 + y^2 = 1$.

Den kan skrivas på formen $F(x, y) = 0$. I det fallet säger vi att y är *implicit* bestämd av x.

Vi kan likväl derivera uttrycket med avseende på x. Om y är en funktion av x får vi bidrag från dessa deriveringar också. Under väldigt allmänna förutsättningar går detta. Det faller under begreppet *implicita funktionssatsen* som vi inte tar upp mer här.

Ett exempel är just $x^2 + y^2 = 1$. Om vi deriverar med avseende på x får vi $2x + 2yy' = 0$. Notera att $2yy'$ motsvarar derivatan av y^2 med avseende på x, och eftersom det är en sammansatt funktion får vi en inre derivata på y'. Alltså är

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Om $y = 0$ så är derivatan odefinierad. Det motsvarar fallet då implicita funktionssatsen inte är tillämpar.

Kapitel 5

Integraler

- Integraler kommer från åtminstone två typer av ursprungsproblem:

1. Vi vill räkna ut en area eller volym.
2. Vi vill summera många försvinnande små bidrag av något, t.ex. beräkna arbetet som är utfört när ett objekt dras mellan två punkter.

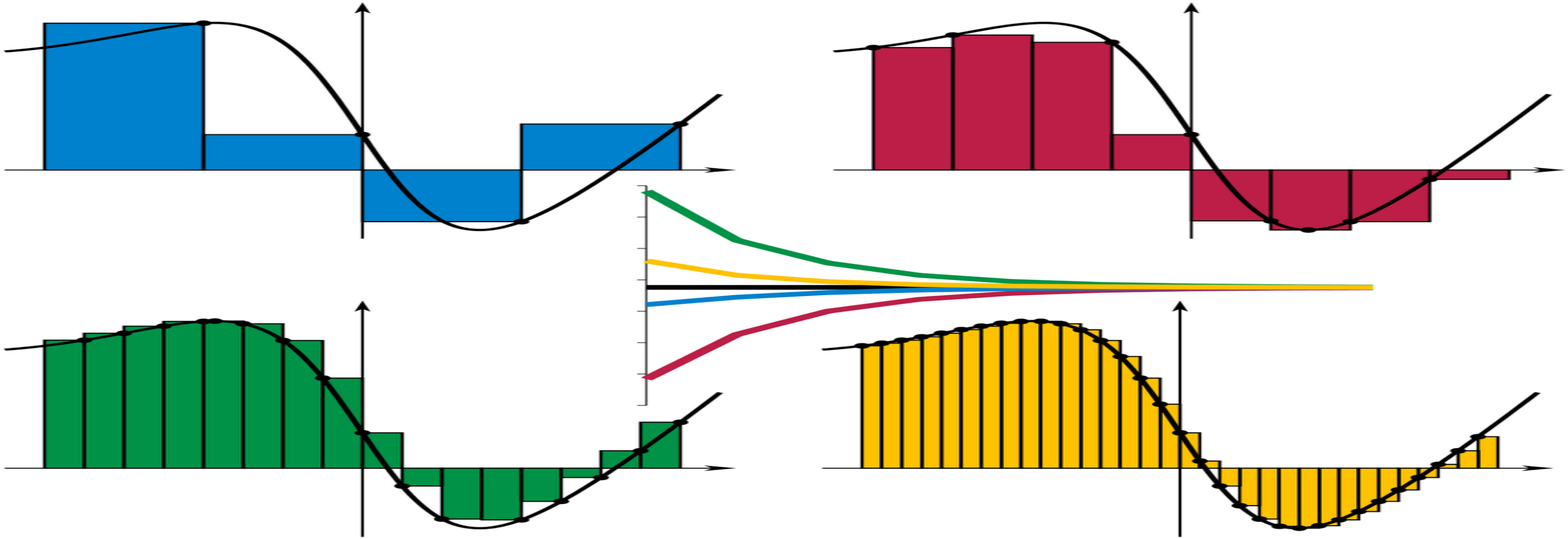
Integraler

Definition: En Riemann summa för ett intervall $[a, b]$ är en summa på formen

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x.$$

Här är $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ och $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ är ett godtyckligt tal i intervallet ifråga.

Olika förfinade Riemann-summor av samma graf:



Definition: För en funktion $f(x)$ på ett intervall $[a, b]$ definierar vi

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Sats: Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ existerar gränsvärdet i definitionen av

$$\int_a^b f(x)dx\,.$$

Med andra ord är f integrerbar.

Analysens fundamentalsats: Om $f(t)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ och $x \in (a, b)$ så är

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

deriverbar och $g'(x) = f(x)$.

Vidare så är

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

där F är en godtycklig primitiv funktion till f.

Satsen är fundamental eftersom den ger oss en möjlighet att räkna ut komplicerade gränsvärden från Riemann summor utifrån primitiva funktioner, dvs. antiderivator. På detta sättet kopplas alla våra satser om *derivator* till *areor och liknande* objekt.

Alltså är en integral en primitiv funktion i en väldigt speciell mening. För att göra skillnad mellan värdet och de primitiva funktionerna i kontexten för integraler introducerar vi följande:

En *bestämd* integral är en integral på formen:

$$\int_a^b f(x)dx$$

En *obestämd* integral är alla primitiva funktioner till integranden f. Den skrivs på formen

$$\int f(x)dx.$$

Notera att om $F(x)$ är en primitiv funktion till f så är $\int f(x)dx = F(x) + C$.

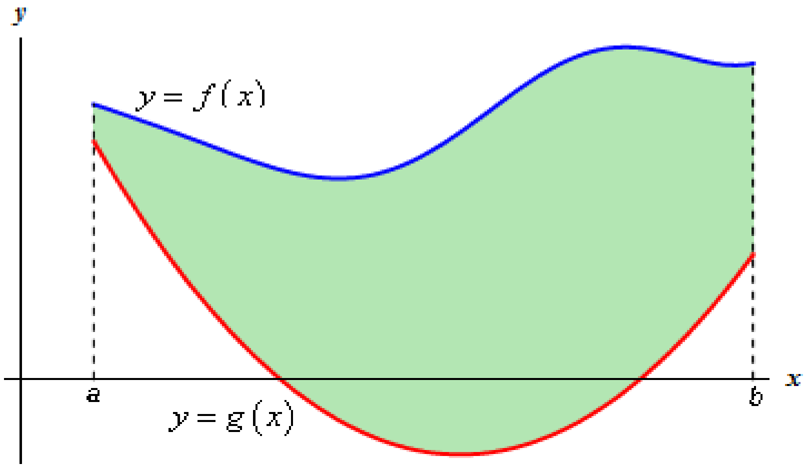
$f(x)$	$F(x)$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
e^x	e^x
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\tan(x)$	$-\ln\|\cos(x)\|$
$\ln(x)$	$x \ln x - x$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$f + g$	$F + G$
cf	cF
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$

Kapitel 6

Tillämpningar på integraler

- Detta kapitlet innehåller tillämpningar av integralbegreppet.
- Det innebär både tolkningar av denna som areor, men även volymer.
- Via Riemannsummor tänker vi också på det som arbete, och medelvärden. Med andra ord kopplar vi, bland annat, medelvärden till area-begreppet.

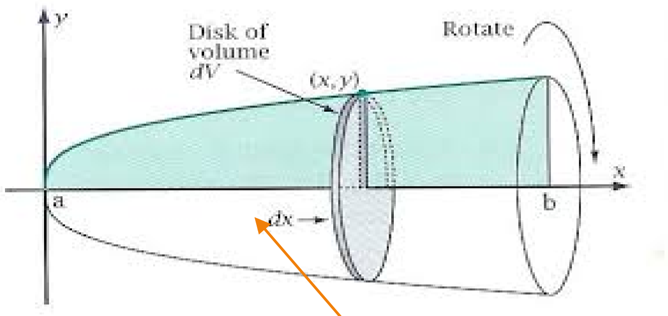


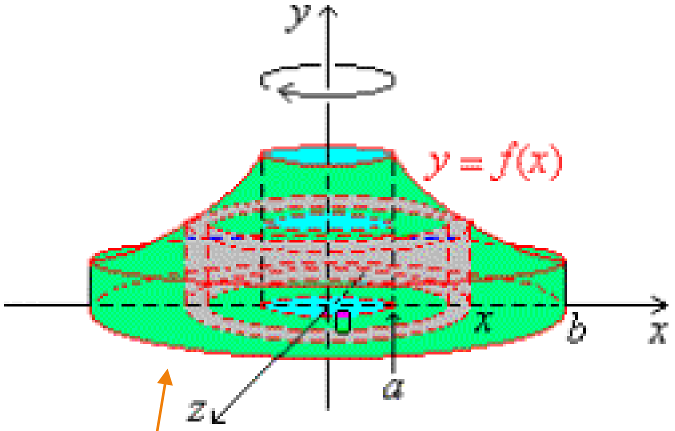
Arean mellan de två kurvorna ges av integralen

$$A = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

Om det inte är så att $f(x) \geq g(x)$ måste vi introducera absolutbeloppstecken:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$





Kan också använda integraler för att räkna ut volymer av t.ex. rotationsytor:

Skivmetoden i fallet med rotation runt x-axeln:

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx\,.$$

Metoden med *cylindiska skal* i fallet med rotation runt y-axeln:

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx\,.$$

Eftersom Riemann-summor påminner mycket om medelvärden finns det möjlighet att tolka integralen på formen

$$f_{medel} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

som ett medelvärde för f på intervallet $[a, b]$.

Sats (Medelvärdessatsen för integraler): Antag att f är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$. Då finns ett $c \in [a, b]$ så att

$$f(c) = f_{medel}.$$

Med andra ord antar f medelvärdet.

Medelvärdessatsen för integraler är starkt kopplad till medelvärdessatsen för derivator. Det är också i princip vad som ligger bakom analysens fundamentalsats, så det är en sats av stort intresse.

Kapitel 7

Integrationsmetoder

- Ibland räcker det inte att bara använda listan på standardintegraler för att räkna ut en primitiv funktion.
- Flera av metoderna som kan användas använder direkt analysens huvudsats.

Derivator	Integraler
Kedjeregeln	Variabelbyte
Produktregeln	Partiell integration

Variabelbyte: Antag att f är kontinuerlig på ett intervall $[a, b]$ och g är deriverbar på densamma. Då gäller det att för obestämda integraler:

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(u)du\,.$$

För bestämda integraler får vi

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Notera de nya integrationsgränserna i andra integralen! Här är u en ny variabel som vi integrerar emot, men tanken är att $u = g(x)$. Om vi jämför

$$\boxed{f\big(g(x)\big)g'(x)dx} \quad \& \quad \boxed{f(u)du}$$

med denna definitionen, ser vi att vi rent formellt, eftersom $f\big(g(x)\big) = f(u)$, kan skriva

$$du = g'(x)dx.$$

OBS: När ni gör variabelbyten, var noggranna med att byta ut alla x mot u. Det får inte vara några blandade termer kvar.

Man måste i princip byta ut integrationsgränserna eftersom man bytt ut variabeln x mot variabeln u. Men om man byter ut u mot x igen när man hittat den primitiva funktionen kan man återanvända de gamla gränserna:

$$\int_0^{\pi/4} \cos(x)\sin(x)\,dx = [u = \sin(x)\,, du = \cos(x)\,dx] = \int_0^{1/\sqrt{2}} u du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{1/\sqrt{2}} = \left[\frac{\sin^2(x)}{2}\right]_0^{\pi/4}.$$

Vi kunde lika gärna ovan först räknat ut den obestämda integralen, och sedan satt in gränserna. På det sättet behöver man inte alltid hålla koll på gränserna efter variabelbytet.

Partiell integration: Antag att f är deriverbar på ett intervall $[a,b]$ och att g är kontinuerlig med primitiv funktion G.

Då gäller det att

$$\int fg\,dx = fG - \int f'G\,dx.$$

samt

$$\int_a^b fg\,dx = [fG]_a^b - \int_a^b f'G\,dx.$$

Bra att använda om man vet endera något om derivatan av f eller något om primitiv funktion till g och det resulterande uttrycket blir enklare. Till exempel är

$$\int x\sin(x)dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx = -x\cos(x) + \sin(x)$$

Mer specifika integraler

Trigonometriska integraler, partialbråksuppdelning & generaliserade integraler.

- Dessa är allmänna integrationsmetoder. I specifika fall kan man behöva speciella metoder.

- I fallet med många trigonometriska integraler, dvs. integraler involverandes trigonometriska funktioner, är det oftast bra med dubbla-vinkel-substitutioner.

När vi har trigonometriska integraler, dvs. integraler involverandes $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$ kan det ofta vara bra att använda dubbla-vinkeln-formler. De skär ner antalet cosinus och sinus-uttryck.

Dubbla vinkeln för cosinus:

- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

Om vi använder $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, som är nog så viktig i sig, kan detta skrivas om som:

- $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

- $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

Dubbla vinkeln för sinus:
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Om vi vill integrera rationella funktioner, dvs. funktioner av typen $\frac{P(x)}{Q(x)}$, där $P(x), Q(x)$ är polynom, finns det i princip två strategier:

1. Genomför polynomdivision för att skära ner graden på täljaren: $P(x) = \mathrm{Q(x)K(x) + R(x)}$.

2. Använd partialbråksuppdelning för att skriva om integralen i termer av uttryck som $\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$.

3. Vi har gått igenom det om $Q(x)$ är linjärt, eller om $Q(x)$ är kvadratiskt. Här är det viktigt att veta hur $Q(x)'s$ nollställen uppför sig (2 enkla, 1 dubbelt, eller inga nollställen) för att veta vilken form vi kan skriva om det hela på.

Den sista typen av integralproblem som kursen handlar om är generaliserade integraler.

Det handlar om extremfall där vi t.ex. integrerar över
- oändliga områden. (dvs. inte ett intervall).
- ett intervall, men funktionen har diskontinuiteter.

Oändligt område, men konvergent

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Oändligt område, men divergent

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$$

Diskontinuerlig integrand, men konvergent

$$\int_{0}^{1} \ln(x)\,dx = -1$$

Jämförelsekriteriet: Antag att f och g är kontinuerliga funktioner för $x \geq a$ och $0 \leq g(x) \leq f(x)$. Då gäller att:
- Om $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergerar så konvergerar $\int_a^\infty g(x)dx$.
- Om $\int_a^\infty g(x)dx$ divergerar så divergerar $\int_a^\infty f(x)dx$.

AVANCEZ

1829

CHALMERS