Tentamen MVE475 - Inledning till matematisk analys

Examinator: Dennis Eriksson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Edvin Wedin, Ankn: 5325

Hjälpmedel: Inga

Tentamen rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

Tentamen på kursen består av två delar; godkäntdelen samt överbetygsdelen. Den enda skillnaden på delarna är den övergripande svårighetsgraden. För godkänt på tentamen som helhet krävs 20 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng erhållna från duggor. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 30 resp. 40 poäng sammanlagt på tentamens alla delar (som har totalt 50 poäng), inklusive eventuella bonuspoäng.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat förmedlas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället.

Lycka till! Dennis

Question	Points
1	20
2	12
3	18
Total:	50

Godkäntnivå

1. I följande uppgifter ska endast korta räkningar redovisas på detta blad. Det lämnas in tillsammans med de andra lösningarna på separat blad.

   (a) Funktionen (3 p)

$$\frac{x^2+2x+1}{x-2}$$

har en sned asymptot då $x \to \infty$. Bestäm denna.

Lösning:
Genom att dela med x och låta x gå mot oändligheten, är det inte svårt att se (betrakta de kvadratiska termerna) att $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{x(x-2)} = 1$. För att hitta den sneda asymptoten $y = x + m$ måste vi bestämma

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{x-2} - x.$$

En förenkling av uttrycket ges av

$$\frac{x^2+2x+1}{x-2} - x = \frac{x^2+2x+1-x(x-2)}{x-2} = \frac{4x+1}{x-1}.$$

Detta i sin tur har gränsvärdet 4 då $x \to \infty$. Alltså måste den sneda asymptoten ges av $y = x + 4$.

   (b) Beräkna gränsvärdet (3 p)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

Lösning:
Vi kan faktorisera uttrycket $\sqrt{x^2+1} = |x|\sqrt{1+1/x^2}$. Vi är intresserade av detta när x går mot $-\infty$, i vilket fall x är negativt och således är $|x| = -x$. Vi får alltså att

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+1/x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+1/x^2} = -1.$$

(c) Kryssa för det eller de påstående nedan som är sanna. Varje felaktigt svar kvitteras mot eventuella korrekta svar. (2 p)

- ◯ För att hitta lokala minimum räcker det att identifiera kritiska punkter.
- ◯ En kontinuerlig funktion har alltid ett globalt max.
- √ **Om $a \in (0,1)$ är ett lokalt max till en deriverbar funktion f så är $f'(a) = 0$.**
- ◯ En kontinuerlig funktion är alltid deriverbar.
- √ **En deriverbar funktion är alltid kontinuerlig.**

(d) Bestäm (3 p)

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx.$$

Lösning:
Här är det rimligt att göra variabelsubstitutionen $u = x^2$. Då får vi $du = 2xdx$, eller $du/2 = xdx$ och gränserna ändras inte eftersom $0^2 = 0$ och $1^2 = 1$. Insättning ger oss integralen

$$\frac{1}{2}\int_0^1 e^u du = \frac{1}{2}(e-1).$$

(e) Ange globala maximum och minimum till funktionen $f(x) = xe^{x^2}$ på intervallet $[0,1]$. (3 p)

Lösning:
Enligt sats så finns maximum till funktionen f endera i ändpunkterna på intervallet (där värdena är $0, e$), eller i punkter där derivatan är odefinierad eller där $f'(x) = 0$. Eftersom funktionen är överallt deriverbar letar vi alltså efter lösningar till $f'(x) = 0$. En snabb räkning ger

$$f'(x) = e^{x^2}(1+2x^2).$$

Detta är noll exakt då $1 + 2x^2 = 0$, vilket saknar reella lösningar. Alltså måste globalt maximum vara e och globalt minimum vara 0.
Ett annat alternativ är att se att $f'(x) = e^{x^2}(1+2x^2)$ alltid är positiv, och alltså är funktionen växande. Maximum och minimum måste således finnas i ändpunkterna.

(f) Bestäm linjäriseringen av $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ i punkten $x = 1$. (3 p)

Lösning:
Linjäriseringen av en deriverbar funktion f i en punkt a ges av

$$f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

I det här fallet är $f(1) = 1-1+1-1+1-1 = 0$. Derivatan av f ges av $5x^4-4x^3+3x^2-2x+1$, vilket för $x = 1$ ger $5 - 4 + 3 - 2 + 1 = 3$. Alltså ges linjäriseringen av

$$L(x) = 0 + 3(x - 1) = 3x - 3.$$

(g) Beräkna den obestämda integralen (3 p)

$$\int x \ln(x) dx.$$

Lösning:
Integralen bestäms antagligen enklast via partiell integration, dvs. via formeln av typen

$$\int fg dx = fG - \int f'G.$$

Vi väljer $f = \ln(x), g = x$ så att $f' = 1/x, G = x^2/2$. Vi får då

$$\int x \ln(x) dx = \ln(x)x^2/2 - \int \frac{1}{x} x^2/2 dx = \ln(x)x^2/2 - x^2/4 + C.$$

2. I nedanstående uppgifter ska fullständiga lösningar redovisas på separat blad.

   (a) Betrakta kurvan definerad av ekvationen (3 p)

   $$\sin(x + 2y) = x^2 + y.$$

   Bestäm en ekvation för tangentlinjen i punkten $(0, 0)$.

   Lösning:
   Vi deriverar och använder kedjeregeln, och erhåller:

   $$(1 + 2y') \cos(x + 2y) = 2x + y'.$$

   Insättning av $(x, y) = (0, 0)$ och förenkling ger oss att $y' = -1$ i $(0, 0)$. Eftersom tangentlinjen genom $(0, 0)$ ges av $(y - 0) = k \cdot (x - 0)$ och $k = -1$ får vi att tangentlinjens ekvation är

   $$y = -x.$$

   (b) Beräkna volymen av den kropp som erhålls då området som begränsas av (4 p)

   $$y = x^2 - 1, y = 0, x = 2$$

   roteras runt y-axeln.

   Lösning:
   Volymen beräknas antagligen enklast med hjälp av metoden med cylindiska skal, där formeln ges av

   $$2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

   där a och b är undre och övre gränser i x-led (vi antar att $f(x) \geq 0$). I det här fallet ser man att gränserna blir $a = 1$ (det är en av skärningspunkterna mellan $y = x^2 - 1$ och $y = 0$) och $b = 2$. Funktionen är $f(x) = x^2 - 1$. Alltså har vi reducerat problemet till att räkna ut integralen

   $$\int_a^b x f(x) dx = \int_1^2 x(x^2 - 1) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = (4 - 2) - (1/4 - 1/2) = \frac{9}{4}.$$

   Vi får det slutgiltiga svaret genom att multiplicera med 2π: Volymen är $\frac{9\pi}{2}$.

   (c) Låt f vara en funktion på (det öppna) intervallet $(0, 1)$. Definiera vad det innebär att f har ett lokalt maximum i en punkt $a \in (0, 1)$. Formulera sedan och bevisa Fermats sats (det räcker att du bara behandlar lokala maximum). (5 p)

   Lösning:
   Se boken eller föreläsningsanteckningarna.

Överbetygsdelen

3. På överbetygsdelen ska fullständiga lösningar lämnas på enskilda blad.

   (a) Bevisa med hjälp av gränsvärdesdefinitionen att $\lim_{x\to 5} x^2 = 25$. (3 p)

   Lösning:
   Vi måste visa att för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att om $|x-5| < \delta$ så är $|x^2 - 25| < \epsilon$. Notera nu att

   $$x^2 - 25 = (x-5)(x+5) = (x-5)(x-5+10) = (x-5)^2 + 10(x-5).$$

   Om det gäller att $|x-5| < \delta$ får vi enligt triangelolikheten att

   $$|x^5 - 25| \leq \delta^2 + 10\delta.$$

   Vi definierar nu δ så att $\epsilon = \delta^2 + 10\delta$, med andra ord så att

   $$\delta = -5 + \sqrt{25 + 4\epsilon}.$$

   eftersom $\epsilon > 0$ är också $\delta > 0$. Alltså finns till varje ϵ ett δ så att olikheterna ovan gäller, och alltså är enligt gränsvärdesdefinitionen $\lim_{x\to 5} x^2 = 25$.

   (b) Beräkna Riemann-summan (3 p)

   $$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3}.$$

   Lösning:
   Notera att

   $$\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n}.$$

   Om vi skriver $x_i = 0 + i/n$ och $\Delta x = 1/n$ ser vi att det är är en Riemann-summa på typen $\sum f(x_i)\Delta x$ för integralen

   $$\int_0^1 x^2 dx.$$

   Den senare kan beräknas direkt och vi får $\frac{1}{3}$.

   (c) Antag att f är en kontinuerlig funktion. Visa att om $\int_{-x}^{x} f(t)dt = 0$ för alla x, så måste funktionen f vara en udda funktion. (3 p)

   Lösning:
   Vi kan derivera uttrycket $\int_{-x}^{x} f(t)dt = 0$. Högerledet har derivatan 0. Vi skriver om vänsterledet som

   $$\int_{-x}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} f(t)dt - \int_{0}^{-x} f(t)dt.$$

Derivatan av denna är enligt analysens huvudsats (tänk på inre derivatan i andra termen)

$$f(x) - (-f(-x)) = f(x) + f(-x).$$

Men eftersom detta är lika med 0, får vi att $f(-x) = -f(x)$, vilket är definitionen av en udda funktion.

(d) Beräkna den generaliserade integralen $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-1}$. (4 p)

Lösning:

Partialbråksuppdelning ger att

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right).$$

Alltså får vi att integralen av $\frac{1}{x^2-1}$ mellan 2 och t ges av

$$\left[\frac{1}{2}\left(\ln(x-1) - \ln(x+1)\right)\right]_2^t = \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + \frac{\ln(3)}{2}.$$

Den generaliserade integralen erhålls genom att låta $t \to \infty$, och eftersom

$$\lim_{t\to\infty} \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) = \ln 1 = 0$$

får vi att integralen blir

$$\ln(3)/2.$$

(e) Formulera och bevisa satsen för variabelsubstitution i integraler. (5 p)

Lösning:

Se boken eller anteckningarna.