Tentamen MVE475 - Inledning till matematisk analys

Examinator: Dennis Eriksson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Edvin Wedin, Ankn: 5325

Hjälpmedel: Inga

Tentamen rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

Tentamen på kursen består av två delar; godkäntdelen samt överbetygsdelen. Den enda skillnaden på delarna är den övergripande svårighetsgraden. För godkänt på tentamen som helhet krävs 20 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng erhållna från duggor. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 30 resp. 40 poäng sammanlagt på tentamens alla delar (som har totalt 50 poäng), inklusive eventuella bonuspoäng.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat förmedlas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället.

Lycka till! Dennis

Godkäntnivå

1. I följande uppgifter ska endast korta räkningar redovisas på detta blad. Det lämnas in tillsammans med de andra lösningarna på separat blad.

   (a) Funktionen (3 p)

   $$\frac{x^2 + 2x + 1}{x - 2}$$

   har en sned asymptot då $x \to \infty$. Bestäm denna.

   Lösning:

   Svar: ....

   (b) Beräkna gränsvärdet (3 p)

   $$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

   Lösning:

   Svar: ....

(c) Kryssa för det eller de påstående nedan som är sanna. Varje felaktigt svar kvitteras mot eventuella korrekta svar. (2 p)

◯ För att hitta lokala minimum räcker det att identifiera kritiska punkter.
◯ En kontinuerlig funktion har alltid ett globalt max.
◯ Om $a \in (0,1)$ är ett lokalt max till en deriverbar funktion f så är $f'(a) = 0$.
◯ En kontinuerlig funktion är alltid deriverbar.
◯ En deriverbar funktion är alltid kontinuerlig.

(d) Bestäm (3 p)

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx.$$

Lösning:

Svar: ....

(e) Ange globala maximum och minimum till funktionen $f(x) = xe^{x^2}$ på intervallet $[0,1]$. (3 p)

Lösning:

Svar: ....

(f) Bestäm linjäriseringen av $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ i punkten $x = 1$. (3 p)

Lösning:

Svar: ....

(g) Beräkna den obestämda integralen (3 p)

$$\int x \ln(x) dx.$$

Lösning:

Svar: ....

2. I nedanstående uppgifter ska fullständiga lösningar redovisas på separat blad.
   (a) Betrakta kurvan definerad av ekvationen (3 p)
   $$\sin(x + 2y) = x^2 + y.$$
   Bestäm en ekvation för tangentlinjen i punkten $(0, 0)$.
   (b) Beräkna volymen av den kropp som erhålls då området som begränsas av (4 p)
   $$y = x^2 - 1, y = 0, x = 2$$
   roteras runt y-axeln.
   (c) Låt f vara en funktion på (det öppna) intervallet $(0, 1)$. Definiera vad det innebär att f har ett lokalt maximum i en punkt $a \in (0, 1)$. Formulera sedan och bevisa Fermats sats (det räcker att du bara behandlar lokala maximum). (5 p)

Överbetygsdelen

3. På överbetygsdelen ska fullständiga lösningar lämnas på enskilda blad.
   (a) Bevisa med hjälp av gränsvärdesdefinitionen att $\lim_{x\to 5} x^2 = 25$. (3 p)
   (b) Beräkna Riemann-summan (3 p)
   $$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3}.$$
   (c) Antag att f är en kontinuerlig funktion. Visa att om $\int_{-x}^{x} f(t)dt = 0$ för alla x, så måste funktionen f vara en udda funktion. (3 p)
   (d) Beräkna den generaliserade integralen $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-1}$. (4 p)
   (e) Formulera och bevisa satsen för variabelsubstitution i integraler. (5 p)