Tentamen MVE475 - Inledning till matematisk analys

Examinator: Dennis Eriksson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Gustav Kettil, Ankn: 5325

Hjälpmedel: Inga

Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

Tentamen på kursen består av två delar; godkäntdelen samt överbetygsdelen. Den enda skillnaden på delarna är den övergripande svårighetsgraden. För godkänt på tentamen som helhet krävs 20 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng erhållna från duggor. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 30 resp. 40 poäng sammanlagt på tentamens alla delar (som har totalt 50 poäng), inklusive eventuella bonuspoäng.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat förmedlas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället.

Lycka till! Dennis

Question	Points
1	20
2	14
3	16
Total:	50

Godkäntnivå

1. I följande uppgifter ska endast korta räkningar redovisas på detta blad. Det lämnas in tillsammans med de andra lösningarna på separat blad.

   (a) Bestäm a så att $y = x$ är en sned asymptot till (3 p)

$$\frac{x^2 + ax + 1}{x - 1}$$

   då $x \to \infty$.

Lösning:
Genom att dela med x och låta x gå mot oändligheten, är det inte svårt att se (betrakta de kvadratiska termerna) att $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+ax+1}{x(x-1)} = 1$, helt oberende av a. För att $y = x + m$ ska vara en sned asymptot ska

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + ax + 1}{x - 1} - x = 0.$$

En förenkling av uttrycket ges av

$$\frac{x^2 + ax + 1}{x - 1} - x = \frac{x^2 + ax + 1 - x(x - 1)}{x - 1} = \frac{(a + 1)x + 1}{x - 1}.$$

Detta i sin tur har ett gränsvärde $a1$ då $x \to \infty$, som vi får genom att betrakta de linjära termerna. Alltså måste $a + 1 = 0$, dvs. $a = -1$.

   (b) Beräkna gränsvärdet (3 p)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x^5)}{x^5}.$$

Lösning:
Om x går mot 0 så gäller detsamma för $h = 2x^5$. Alltså sammanfaller gränsvärdet med

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h/2} = \lim_{h\to 0} 2\frac{\sin(h)}{h} = 2.$$

Här har vi använt standardgränsvärdet $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$.

(c) Kryssa för det eller de påstående nedan som är sanna. Varje felaktigt svar kvitteras mot eventuella korrekta svar. (2 p)

◯ Om a är ett lokalt max till en deriverbar funktion f så är $f'(a) = 0$.
◯ En kontinuerlig funktion har alltid ett globalt max.
$\surd$ **Om f inte har ett globalt max på intervallet $[0, 1]$ så är f inte kontinuerlig på samma intervall.**
◯ En kontinuerlig funktion är alltid deriverbar.
$\surd$ **En deriverbar funktion är alltid kontinuerlig.**

(d) Bestäm (3 p)

$$\int \frac{\tan(x)}{\cos(x)} dx.$$

Lösning:
Här är det rimligt att skriva ut definition $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Den obestämda integralen att betrakta blir då

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} dx.$$

Om vi utför substitutionen $u = \cos(x)$ får vi $du = -\sin(x)dx$ så att integralen blir

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} dx = \int \frac{-du}{u^2} = \frac{1}{u} + C = \frac{1}{\cos(x)} + C.$$

(e) Bestäm var funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ är konvex (konkav uppåt), konkav (konkav neråt) och eventuella inflektionspunkter. (3 p)

Lösning:
Konvexitet och konkavitet kan läsas av från andraderivatan, som i det här fallet är $f'' = 6x - 6$. Om $x > 1$ så är f'' positiv, och där är f konvex (konkav uppåt), och för $x < 1$ så är f'' negativ, och där är f konkav (konkav neråt). I punkten $x = 1$ byter andraderivatan tecken, vilket är definitionen för en en inflektionspunkt.

(f) Bestäm linjäriseringen av $f(x) = \int_0^{2x} \cos(t)dt$ i punkten $x = \pi/2$. (3 p)

Lösning:
Linjäriseringen av en deriverbar funktion f i en punkt a ges av

$$f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

I det här fallet är $f(\pi/2) = \int_0^{\pi} \cos(x)dx = 0$. Derivatan av $f(u) = \int_0^u g(t)dt$ ges av $g(u)$, men i det här fallet är $u = 2x, g(x) = \cos(x)$ så vi får också en inre derivata på 2, så att $f'(x) = 2 \cdot \cos(2x)$ och $f'(\pi/2) = 2 \cdot \cos(\pi) = -2$. Alltså ges linjäriseringen av

$$L(x) = -2 \cdot (x - \pi/2).$$

(g) Bestäm (3 p)

$$\int_{-1}^{0} xe^{-x}dx.$$

Lösning:
Integralen bestäms antagligen enklast via partiell integration, dvs. via formeln av typen

$$\int fgdx = fG - \int f'G.$$

Vi väljer $f = x, g = e^{-x}$ så att $f' = 1, G = -e^{-x}$. Vi får då

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} = -xe^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(1 + x).$$

Insättning av integrationsgränserna ger oss att integralen blir

$$[-e^{-x}(1 + x)]_{-1}^{0} = (-e^{-0}(1 + 0)) - (-e^{-(-1)}(1 + (-1))) = -1.$$

2. I nedanstående uppgifter ska fullständiga lösningar redovisas på separat blad.

(a) Betrakta kurvan definerad av ekvationen (3 p)

$$e^{x+y} = x^2 + y^3 + 1.$$

Bestäm en ekvation för tangentlinjen i punkten $(1, -1)$.

Lösning:
Vi deriverar och använder kedjeregeln, och erhåller:

$$(1 + y')e^{x+y} = 2x + 3y^2y'.$$

Insättning av $(x, y) = (1, -1)$ ger oss:

$$(1 + y') = 2 + 3y'$$

så att $y' = -1/2$ i $(1, -1)$. Eftersom tangentlinjen genom $(1, -1)$ ges av $(y - (-1)) = k \cdot (x - 1)$ och $k = \frac{-1}{2}$ får vi

$$y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}.$$

(b) Beräkna den generaliserade integralen (3 p)

$$\int_0^\infty \frac{x+1}{x^2+1}dx.$$

Lösning:
Integralen är generaliserad eftersom integrationsområdet är oändligt. Vi börjar med att hantera integranden för att sedan beräkna integralen. En möjlig partialbråksuppdelning ges av

$$\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1}.$$

Primitiva funktioner för den första termen ges av $\arctan(x)$, och för den andra fås den genom variabelsubstitutionen $u = x^2 + 1$, varav vi finner att den ges av $\frac{1}{2}\log(x^2 + 1)$ (vi skriver log istället för ln") Alltså får vi att

$$\int_0^t \frac{x+1}{x^2+1}dx = (\arctan(t) + \frac{1}{2}\log(t^2 + 1)) - (\arctan(0) + \frac{1}{2}\log(1)).$$

Om vi låter t gå mot oändligheten får vi

$$\int_0^\infty \frac{x+1}{x^2+1}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{x+1}{x^2+1}dx = \pi/2 + \lim_{t\to\infty} 1/2\log(t^2 + 1)) = \infty$$

så integralen divergerar.

(c) En luftballong fylls med luft, med 1 m^3 per minut. Om vi för enkelhetens skull antar att ballongen är helt rund och kan expandera utan problem, vad är tillväxthastigheten av radien per minut då radien är 5 m? (4 p)

Lösning:
Volymen ges av formeln $V = \frac{4\pi r^3}{3}$, så $dV = 4\pi r^2 dr$ och alltså får vi att

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

Vi vet också att $dV/dt = 1$, och alltså är

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}.$$

Då $r = 5$ så ges detta av

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{100\pi}.$$

(d) Definiera $\arccos(x)$ och härled (dvs. formulera och bevisa) formeln för dess derivata. (4 p)

Lösning:
Se boken eller föreläsningsanteckningarna.

Överbetygsdelen

3. På överbetygsdelen ska fullständiga lösningar lämnas på enskilda blad.

(a) Räkna ut volymen av området som begränsas av $y = x, y = x^2$ och som roteras runt $y = 1$. (3 p)

Lösning:
Området ifråga har en begränsning mellan $x = 0$ och $x = 1$ (bild utgår). Om vi räknar ut volymen genom skivor i x-len får vi en ytre radie på $1 - x^2$ och en inre radie på $1 - x$. Volymen blir således

$$\pi \int_0^1 [(1-x^2)^2 - (1-x)^2]dx = \pi \int_0^1 (2x - 3x^2 + x^4)dx = \pi(1 - 1 + \frac{1}{5}) = \pi\frac{1}{5}.$$

(b) Bestäm $\int \frac{1}{(2+x^2)^{3/2}} dx$. (3 p)

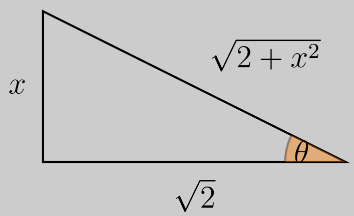
Lösning:
Vi noterar först att

$$\int \frac{1}{(2+x^2)^{3/2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2+x^2}^3} dx$$

innehåller $\sqrt{2+x^2}$ så det ser rimligt ut att göra en invers tangens-substitution: $x = \sqrt{2}\tan\theta$, där $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Då är som bekant $\sqrt{2+x^2} = \frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}$ och $dx = \frac{\sqrt{2}}{\cos^2\theta}d\theta$. Då får vi

$$\int \frac{1}{(2+x^2)^{3/2}}dx = \frac{1}{(\sqrt{2}^3/\cos^3\theta)}\frac{sqrt2d\theta}{cos^2\theta} = \frac{1}{2}\int \cos\theta d\theta = \frac{1}{2}\sin\theta + C.$$

Vi måste bestämma $\sin\theta$ i termer av x. Eftersom $\tan\theta = x/\sqrt{2}$ motsvarar detta tangens för triangeln som nedan:



Alltså är $\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}$ så att

$$\int \frac{1}{(2+x^2)^{3/2}}dx = \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2+x^2}} + C.$$

(c) Formulera och bevisa första delen av analysens fundamentalsats. (5 p)

Lösning:
Se boken eller anteckningarna.

(d) Låt n vara ett positivt heltal. Visa att $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}(x)dx = \frac{\pi}{2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}$. (5 p)

Lösning:
Skriv $I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^{2n}(x)dx$. Om vi gör en partiell integration med ”uppdelningen” $\sin^{2n-1}(x)\cdot\sin(x)$ får vi, eftersom derivatan av $\sin^{2n-1}(x)$ är $(2n-1)\sin^{2n-2}(x)\cos(x)$, att

$$I_n = [\sin^{2n-1}(x)\cdot(-\cos(x))]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}(2n-1)\sin^{2n-2}(x)\cdot\cos^2(x)dx.$$

Eftersom $\cos(\pi/2) = \sin(0) = 0$, så får vi att

$$I_n = \int_0^{\pi/2}(2n-1)\sin^{2n-2}(x)\cdot\cos^2(x)dx.$$

Skriv nu $\cos^2(x) = 1-\sin^2(x)$, så får vi att

$$I_n = (2n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-2}(x)dx - (2n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}(x)dx = (2n-1)I_{n-1} - (2n-1)I_n.$$

Med andra ord så får vi $I_n = \frac{2n-1}{2n}I_{n-1}$. Talet $J_n = \frac{\pi}{2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}$ uppfyller samma rekursion, och eftersom $I_0 = J_0 = \pi/2$ måste de vara lika.