Tentamen MVE475 - Inledning till matematisk analys

Examinator: Dennis Eriksson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Gustav Kettil, Ankn: 5325

Hjälpmedel: Inga

Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

Tentamen på kursen består av två delar; godkäntdelen samt överbetygsdelen. Den enda skillnaden på delarna är den övergripande svårighetsgraden. För godkänt på tentamen som helhet krävs 20 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng erhållna från duggor. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 30 resp. 40 poäng sammanlagt på tentamens alla delar (som har totalt 50 poäng), inklusive eventuella bonuspoäng.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat förmedlas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället.

Lycka till! Dennis

Godkäntnivå

1. I följande uppgifter ska endast korta räkningar redovisas på detta blad. Det lämnas in tillsammans med de andra lösningarna på separat blad.

   (a) Bestäm a så att $y = x$ är en sned asymptot till (3 p)

   $$\frac{x^2 + ax + 1}{x - 1}$$

   då $x \to \infty$.

   Lösning:

   Svar: ....

   (b) Beräkna gränsvärdet (3 p)

   $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x^5)}{x^5}.$$

   Lösning:

   Svar: ....

(c) Kryssa för det eller de påstående nedan som är sanna. Varje felaktigt svar kvitteras mot eventuella korrekta svar. (2 p)

◯ Om a är ett lokalt max till en deriverbar funktion f så är $f'(a) = 0$.
◯ En kontinuerlig funktion har alltid ett globalt max.
◯ Om f inte har ett globalt max på intervallet $[0, 1]$ så är f inte kontinuerlig på samma intervall.
◯ En kontinuerlig funktion är alltid deriverbar.
◯ En deriverbar funktion är alltid kontinuerlig.

(d) Bestäm (3 p)

$$\int \frac{\tan(x)}{\cos(x)} dx.$$

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm var funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ är konvex (konkav uppåt), konkav (konkav neråt) och eventuella inflektionspunkter. (3 p)

Lösning:

Svar: ....

(f) Bestäm linjäriseringen av $f(x) = \int_0^{2x} \cos(t)dt$ i punkten $x = \pi/2$. (3 p)

Lösning:

Svar: ....

(g) Bestäm (3 p)

$$\int_{-1}^{0} xe^{-x}dx.$$

Lösning:

Svar: ....

2. I nedanstående uppgifter ska fullständiga lösningar redovisas på separat blad.
   (a) Betrakta kurvan definerad av ekvationen (3 p)
   $$e^{x+y} = x^2 + y^3 + 1.$$
   Bestäm en ekvation för tangentlinjen i punkten $(1, -1)$.
   (b) Beräkna den generaliserade integralen (3 p)
   $$\int_0^\infty \frac{x+1}{x^2+1}dx.$$
   (c) En luftballong fylls med luft, med 1 m^3 per minut. Om vi för enkelhetens skull antar att ballongen är helt rund och kan expandera utan problem, vad är tillväxthastigheten av radien per minut då radien är 5 m? (4 p)
   (d) Definiera $\arccos(x)$ och härled (dvs. formulera och bevisa) formeln för dess derivata. (4 p)

Överbetygsdelen

3. På överbetygsdelen ska fullständiga lösningar lämnas på enskilda blad.
   (a) Räkna ut volymen av området som begränsas av $y = x, y = x^2$ och som roteras runt $y = 1$. (3 p)
   (b) Bestäm $\int \frac{1}{(2+x^2)^{3/2}}dx$. (3 p)
   (c) Formulera och bevisa första delen av analysens fundamentalsats. (5 p)
   (d) Låt n vara ett positivt heltal. Visa att $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x)dx = \frac{\pi}{2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}$. (5 p)