Tentamen MVE475, LMA033 - Inledning till matematisk analys

Examinator: Dennis Eriksson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Olof Elias, Ankn: 5325

Hjälpmedel: Inga

Tentamen rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

Tentamen på kursen består av två delar; godkäntdelen samt överbetygsdelen. Den enda skillnaden på delarna är den övergripande svårighetsgraden. För godkänt på tentamen som helhet krävs 20 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng erhållna från duggor. För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 30 resp. 40 poäng sammanlagt på tentamens alla delar (som har totalt 50 poäng), inklusive eventuella bonuspoäng.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat förmedlas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället.

Lycka till! Dennis

Question	Points
1	20
2	12
3	18
Total:	50

Godkäntnivå

1. I följande uppgifter ska endast korta räkningar redovisas på detta blad. Det lämnas in tillsammans med de andra lösningarna på separat blad.

   (a) Funktionen (3 p)

   $$\frac{x^2 - 2x + 1}{x + 2}$$

   har en sned asymptot då $x \to \infty$. Bestäm denna.

   Lösning:
   Genom att dela med x och låta x gå mot oändligheten, är det inte svårt att se (betrakta de kvadratiska termerna) att $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+1}{x(x+2)} = 1$. För att hitta den sneda asymptoten $y = x + m$ måste vi bestämma

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 2} - x.$$

   En förenkling av uttrycket ges av

   $$\frac{x^2 - 2x + 1}{x + 2} - x = \frac{x^2 - 2x + 1 - x(x + 2)}{x + 2} = \frac{-4x + 1}{x - 1}.$$

   Detta i sin tur har gränsvärdet -4 då $x \to \infty$. Alltså måste den sneda asymptoten ges av $y = x - 4$.

   (b) Beräkna gränsvärdet (3 p)

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{x^2}$$

   Lösning:
   Uttrycket påminner om $\sin(h)/h$, då $h = x^3$ Om vi vill skriva det på det sättet måste vi förlänga med x i täljare och nämnare för att erhålla:

   $$x \sin(h)/h.$$

   Då $h \to 0$ så går uttrycket $\sin(h)/h$ mot 1 (det är ett standardgränsvärde), medans x går mot 0. Alltså går hela uttrycket mot 0.

(c) Kryssa för det eller de påstående nedan som är sanna. Varje felaktigt svar kvitteras mot eventuella korrekta svar. (2 p)

◯ För att hitta lokala minimum räcker det att identifiera kritiska punkter.
$\surd$ **Om f och g är deriverbara, så är också $f + g$ deriverbar.**
◯ Om f ej är kontinuerlig på $[0, 1]$, och $f(0) = 0, f(1) = 1$, så finns tal $0 < \xi < 1$ så att $f(\xi) = 0.5$.
$\surd$ **Om f är kontinuerlig på $[0, 1]$, och $f(0) = 0, f(1) = 1$, så finns tal $0 < \xi < 1$ så att $f(\xi) = 0.5$.**
◯ En kontinuerlig funktion är alltid deriverbar.

(d) Bestäm (3 p)

$$\int_0^\pi \cos(x)\sin(x)dx.$$

Lösning:
Detta räknas antagligen enklast ut genom att använda att $\sin(2x)/2 = \cos(x)\cos(x)$. Då erhåller vi

$$\int_0^\pi \cos(x)\sin(x)dx = \int_0^\pi \sin(2x)/2dx = [-\cos(2x)/4]_0^\pi = 0.$$

(e) Ange globala maximum och minimum till funktionen $f(x) = x\sqrt{x^2+3}$ på intervallet $[0, 1]$. (3 p)

Lösning:
Enligt sats så finns maximum till funktionen f endera i ändpunkterna på intervallet (där värdena är $0, 2$), eller i punkter där derivatan är odefinierad eller där $f'(x) = 0$. Eftersom funktionen är överallt deriverbar i det inre av $[0, 1]$ letar vi alltså efter lösningar till $f'(x) = 0$. En snabb räkning ger

$$f'(x) = \sqrt{x^2+3} + x^2\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}.$$

Om vi multiplicerar upp $\sqrt{x^2+3}$, som inte är noll, ser vi att uttrycket är noll exakt då $x^2 + 3 + x^2 = 0$, vilket saknar reella lösningar. Alltså måste globalt maximum vara 2 och globalt minimum vara 0.
Ett annat alternativ är att se att $f'(x) = \sqrt{x^2+3} + x^2\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$ alltid är positiv, och alltså är funktionen växande. Maximum och minimum måste således finnas i ändpunkterna, och enligt ovan är globalt max 2 och globalt min 0.

(f) Bestäm linjäriseringen av $f(x) = 2^x$ i punkten $x = 1$. (3 p)

Lösning:
Linjäriseringen av en deriverbar funktion f i en punkt a ges av

$$f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

I det här fallet är $f(1) = 2^1 = 2$. Derivatan av f beräknas lättast genom att skriva $f(x) = e^{x \ln 2} = e^y$. Detta har yttre derivatan $e^{x \ln 2}$ och inre derivatan $y' = \ln(2)$, dvs. $f' = \ln(2)2^x$. För $x = 1$ har vi $y' = \ln(2)2$. Alltså ges linjäriseringen av

$$L(x) = 2 + 2\ln(2)(x - 1) = 2 - 2\ln(2) + 2\ln(2)x.$$

(g) Bestäm den obestämda integralen (3 p)

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} dx.$$

Lösning:
Integralen bestäms antagligen enklast via variabelbytet $u = \sin(x)$. Då gäller att $du = \cos(x)dx$ vilket ger gör att uttrycket tar formen

$$\int \frac{1}{u^2} du = \frac{-1}{u} + C$$

för en konstant C. Insättning av $u = \sin(x)$ ger att den obestämda integralen alltså blir $\frac{-1}{\sin(x)} + C$.

2. I nedanstående uppgifter ska fullständiga lösningar redovisas på separat blad.

   (a) Betrakta kurvan definerad av ekvationen (3 p)

$$e^{x^2-y} = 1.$$

Bestäm en ekvation för tangentlinjen i punkten $(1, 1)$.

Lösning:
Vi deriverar och använder kedjeregeln, och erhåller:

$$(2x - y')e^{x^2-y} = 0.$$

Insättning av $(x, y) = (1, 1)$ och förenkling ger att $y' = 2$. Eftersom tangentlinjen genom $(1, 1)$ ges av $(y - 1) = k \cdot (x - 1)$ och $k = 2$ får vi att tangentlinjens ekvation är

$$y = 2x - 1.$$

   (b) Beräkna volymen av den kropp som erhålls då området som begränsas av (4 p)

$$y = x^2 - 1, y = 0, x = 0$$

roteras runt x-axeln.

Lösning:
Volymen beräknas antagligen enklast med hjälp av metoden med skivningsmetoden, där formeln ges av

$$\pi \int_a^b f(x)^2 - g(x)^2 dx$$

där a och b är undre och övre gränser i x-led och området begränsas av $f(x)$ ytterst och $g(x)$ innerst. I det här fallet ser man att gränserna blir $a = 0, b = 1$. Funktionen är $f(x) = x^2 - 1$. Alltså har vi reducerat problemet till att räkna ut integralen

$$\int_0^1 (x^2 - 1)^2 - 0^2 dx = \int_0^1 x^4 - 2x^2 + 1 dx = \left[\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = \frac{8}{15}.$$

Vi får det slutgiltiga svaret genom att multiplicera med π: Volymen är $\frac{8\pi}{15}$.

   (c) Formulera och bevisa satsen för partiell integration för en obestämd integral. (5 p)

Lösning:
Se boken eller föreläsningsanteckningarna.

Överbetygsdelen

3. På överbetygsdelen ska fullständiga lösningar lämnas på enskilda blad.

(a) Beräkna Riemann-summan (3 p)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} \sin(i/n).$$

Lösning:
Notera att

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} \sin(i/n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} \sin(\frac{1}{n}) \right) \frac{1}{n}.$$

Om vi skriver $x_i = 0 + i/n$ och $\Delta x = 1/n$ ser vi att det är är en Riemann-summa på typen $\sum f(x_i)\Delta x$ för integralen

$$\int_0^1 x \sin(x) dx.$$

Den senare kan beräknas direkt med partiell integration (derivera x och integrera $\sin(x)$ och vi får $\sin(1) - \cos(1)$.

(b) Låt $f(x) = x^3 + 3x$ och låt $g(x) = f^{-1}(x)$. Beräkna $\int_0^{14} g(x)dx$ (3 p)

Lösning:
Derivatan av $f(x)$ är $3(x^2+1)$, och derivatan av inversen ges av $g'(x) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{3}\frac{1}{t^2+1}$, där $t = g(x)$. Vi har därmed att $dt = \frac{1}{3}\frac{1}{t^2+1}dx$, eller $dx = 3(t^2+1)dt$. Alltså tar integranden formen $g(x)dx = t3(t^2+1)dt = 3t^3+3t$. Den har primitiv funktion som ges av $3t^4/4+3t^2/2$. Då $f(0) = 0, f(2) = 14$, får vi att $g(0) = 0, g(14) = 2$ så att de nya gränserna blir 0 och 2. En direkt insättning ger att i slutänden blir integralen 30.

(c) Definiera konceptet generaliserad integral, och förklara varför $\int_0^1 \ln(x)dx$ är en generaliserad integral. Bestäm om denna konvergerar och ange i så fall dess värde. (4 p)

Lösning:
För definition av generaliserad integral, se bok eller föreläsningsanteckningar.

Integralen är generaliserad för att $\ln(x)$ inte är definierad på hela intervallet, mer precist i $x = 0$. Integralen, om den konvergerar, är definierad som gränsvärdet då $c \to 0+$ $\int_c^1 \ln(x)dx$. Eftersom $\ln(x)$ har $x\ln(x) - x$ som primitiv funktion, vilket ses via partiell integration om man inte kommer ihåg formeln, blir integralen

$$[1\ln(1) - 1] - [c\ln(c) - c] = c - c\ln(c) - 1$$

Det enda icke-triviala gränsvärdet att beräkna är $\lim_{c\to 0+} c\ln(c)$. Det är samma gränsvärde som om man sätter $c = e^{-t}$, och låter $t \to \infty$. Då blir uttrycket på formen

$$c\ln(c) = e^{-t}\ln(e^{-t}) = -\frac{t}{e^t}.$$

Via t.ex. L'Hospitals regel ser vi att gränsvärdet är 0 då $t \to \infty$. Allt taget tillsammans ser vi att gränsvärdet är

$$-1.$$

(d) Visa gränsvärdeslagen som säger att om $\lim_{x \to a} f(x) = L$ och $\lim_{x \to a} g(x) = M$ så är $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = LM$. (4 p)

Lösning:
Se boken eller föreläsningsanteckningar.

(e) Formulera och bevisa medelvärdessatsen för integraler. (4 p)

Lösning:
Se boken eller föreläsningsanteckningar.