

MVE480 Linjär algebra S

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2016 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 35 resp. 45 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 6 resp. 8 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad (15p)
inlämnas tillsammans med övriga lösningar.

2. Betrakta två avbildningar F och G från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$. Avbildningen F innebär en vridning $\frac{\pi}{3}$ moturs medan G innebär ortogonal projektion på x_1 -axeln.

- (a) Bestäm de båda avbildningarnas standardmatriser. Motivera ditt svar genom att rita figurer! (3p)

- (b) Bestäm matrisen för den sammansatta avbildningen som fås om man först projicerar och sedan vrider. (1p)

3. (a) Definera vad som menas med nollrummet hos en $m \times n$ matris A . (1p)

- (b) Bestäm baser för $\text{Col } A$ och $\text{Nul } A$, där (4p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & -4 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Ett plan Π innehåller punkterna $(1, 2, 2)$ och $(2, 3, 4)$. Vidare vet man att planet Π är vinkelrät mot planet $3x + 2y - z = 0$. Bestäm en ekvation för planet Π . (4p)

5. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & a \end{bmatrix}$ och vektorn $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ är givna.

- (a) Bestäm konstanten a så att matrisen A har vektorn $\mathbf{v}_1$ som egenvektor. (1p)

- (b) Finns det fler egenvektorer till matrisen A för det erhållna värdet på konstanten a ? (3p)

- (c) Lös systemet $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ med $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ (för ditt angivna värde på konstanten a). (2p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar.

(Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Ett homogent ekvationssystem med en inverterbar matris kan ha en icke-trivial lösning. (1p)

(b) Låt T vara den linjära avbildning som ges av $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 - 4x_3, x_2 + 3x_3)$.
Då är T injektiv. (2p)

(c) Om $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5$ är linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^5$ så är $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ också linjärt oberoende. (2p)

7. Låt $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som geometriskt betyder projektion i planet $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

(a) Bestäm en ortonomerad bas för planet. (3p)

(b) Bestäm F 's matris i standardbasen. (4p)

8. Formulera och bevisa Cramers regel. (4p)

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	MVE480 Linjär algebra S 160319	sid.nummer 1	Poäng
------------	--------------------------------	-----------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- (a) För vilka högerled $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3]^T$ har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ingen, unik, respektive oändligt många lösningar?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

(3p)

Svar:

(b) Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- i. Bestäm inversen till A .

(2p)

- ii. Är kolonnerna i A linjärt oberoende?

(1p)

Lösning:

Svar:

- (c) Bestäm konstanten h så att vektorerna $\mathbf{v}_1 = [3 \ -3 \ 0]^T$, $\mathbf{v}_2 = [4 \ -2 \ 1]^T$ och $\mathbf{v}_3 = [7 \ -5 \ h]^T$ blir linjärt beroende. Ange dessutom en vektor som är ortogonal mot $\mathbf{v}_2$.

(3p)

Lösning:

Svar:

VÄND!

(d) Bestäm minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ då $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ (3p)

Lösning:

Svar:

(e) Låt $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$. (3p)

Lös matrisekvationen $AX = X + B$

Lösning:

Lösningar MVE480, Linjär algebra S, 160319

1. (a) Vi ställer upp den utökade matrisen och ser för vilka b systemet är lösbart.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & b_1 \\ 3 & 3 & 0 & b_2 \\ -2 & 3 & -5 & b_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & b_1 \\ 0 & 6 & -6 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 1 & -1 & b_3 + 2b_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & b_1 \\ 0 & 6 & 6 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & 0 & -15b_1 + b_2 - 6b_3 \end{bmatrix}.$$

Vi ser att då $-15b_1 + b_2 - 6b_3 \neq 0$ saknas lösning och då $-15b_1 + b_2 - 6b_3 = 0$ finns det oändligt många lösningar. Aldrig unik lösning.

- (b) Elimination av utökade matrisen $[A \ I]$ ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Så $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Att A^{-1} existerar är ekvivalent med att kolonnerna i A är linjärt oberoende.

- (c) Vi ser för vilka h determinanten av A är lika med noll, ty för dessa h är kolonnerna i A linjärt beroende.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & h \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & h \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 0 & h \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 6h - 6 = 0$$

Så $h = 1$. En ortogonal vektor är t.ex. $\mathbf{v}_4 = [1 \ 2 \ 0]^T$

- (d) Vi har

$$A^T A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}, \quad (A^T A)^{-1} = \frac{1}{53} \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Minstakvadratlösningen ges alltså av

$$(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} = \frac{1}{53} \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{53} \begin{bmatrix} -6 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

- (e) Vi löser matrisekvationen

$$AX - X = B \Leftrightarrow AX - IX = B \Leftrightarrow (A - I)X = B \Leftrightarrow X = (A - I)^{-1}B,$$

om $(A - I)^{-1}$ existerar.

$$A - I = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad (A - I)^{-1} = - \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -18 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Om vi kallar F :s avbildningsmatris för A har vi

$$A = [F(\mathbf{e}_1) \ F(\mathbf{e}_2)] = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & \cos \frac{5\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \sin \frac{5\pi}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Om vi kallar G :s avbildningsmatris för B har vi

$$B = [G(\mathbf{e}_1) \ G(\mathbf{e}_2)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (b) Om vi först projicerar och sedan vrider är det matrisen AB vi söker.

$$AB = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Nollrummet till en matris A är mängden av alla lösningar $\mathbf{x}$, till den homogena ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- (b) Upprepade radoperationer ger

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & -4 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser att första, andra och fjärde kolonnerna är pivotkolonner, så

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} -2 & -6 & -4 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ är en bas för nollrummet.

Vi läser av att

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3x_3 - 2x_5 \\ -x_3 \\ x_3 \\ 0 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De två vektorerna i högerledet bildar en bas för nollrummet.

4. En vektor $\mathbf{v}_1$ i planet fås genom $\mathbf{v}_1 = (2 - 1, 3 - 2, 4 - 2) = (1, 1, 2)$. Vi har att planet $3x + 2y - z = 0$ är vinkelrät mot planet Π , vilket innebär att dess normalvektor $\mathbf{v}_2 = (3, 2, -1)$ är parallell med det sökta planet. Om vi nu tar $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ får vi en vektor som är vinkelrät mot båda dessa vektorer, som då är en normalvektor till planet Π .

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = (-5, 7, -1).$$

Insättning i planets ekvation ger

$$-5x + 7y - z + d = 0$$

Insättning av punkten $(1, 2, 2)$ (som vi vet ligger i planet) ger att $d = -7$, så

$$5x - 7y + z + 7 = 0$$

är ekvationen för det sökta planet.

5. (a) $A\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1$ ger

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 - a \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

och vi ser att med $a = 1$ och $\lambda = -1$ så är $\mathbf{v}_1$ en egenvektor till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (b) Vi beräknar

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 4).$$

Eigenvärdena är alltså $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 4$. Vi söker egenvektorn tillhörande egenvärdet $\lambda_2 = 4$.

$$A - \lambda_2 I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har att x_1 är en bunden variabel och x_2 är en fri variabel, vilket ger

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

och därmed har vi att $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ är en egenvektor.

(c) Systemets allmänna lösning är

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{4t}$$

Insättning av $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ger att $C_1 = -\frac{3}{5}$ och $C_2 = \frac{1}{5}$, så

$$\mathbf{x}(t) = -\frac{3}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{4t}.$$

6. (a) Falskt. Om A är inverterbar så har ett homogent ekvationssystem endast trivial lösning.

(b) Falskt. T är injektiv om och endast om $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ endast har trivial lösning. I vårt fall har vi

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

och vi ser direkt att x_3 är en fri variabel, vilket innebär att $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ inte har trivial lösning och därmed är avbildningen ej injektiv.

(c) Sant. Antag att

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 + c_4 \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

har en icke-trivial lösning (d.v.s. minst en av $c_1, \dots, c_4 \neq 0$). Detta innebär i så fall att

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 + c_4 \mathbf{v}_4 + 0 \mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$$

Men detta kan inte inträffa ty

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$$

är linjärt oberoende enligt påståendet, så

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$$

är linjärt oberoende.

7. (a) Tag två vektorer som spänner upp planet t.ex. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Vi väljer $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och tillämpar satsen om ortogonal projektion

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

och en ortonomerad bas blir då

$$U = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\}.$$

- (b) Nu kan vi tillämpa sats 6.3.10. som säger att avbildningsmatrisen fås genom UU^T , vilket ger

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Det finns alternativa lösningsmetoder som t.ex. att projicera standardbasvektorerna i det givna planet, eller enligt följande.

Vid ortogonal projektion så projiceras vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ på

sig själva (ty de ligger i planet) och normalvektorn till planet $\mathbf{n} = \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

projiceras på nollvektorn. Vi har då med sambandet att $A\mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k$ att

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Tillsammans ger detta

$$A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

där

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \dots = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

och återstår nu att beräkna A där

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$