

MVE480 Linjär algebra S

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkändtdelen). Bonuspoäng från duggor 2016 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 35 resp. 45 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 6 resp. 8 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkändtdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (15p)

2. (a) Definera vad som menas med en minstakvadratlösning till en ekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (2p)

- (b) Ange en ekvation för den linje som är bäst anpassad, i minstakvadratmening, till punkterna (4p)

$$(1, 5), \quad (2, 6), \quad (3, 10), \quad (4, 12), \quad (5, 17).$$

3. (a) Förklara vad som menas med begreppet *linjärt beroende mängd av vektorer* i $\mathbb{R}^n$. (2p)
(b)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ h \end{bmatrix}.$$

- i. Avgör för vilka värden på h vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ är linjärt beroende. (3p)
ii. För varje värde på h , bestäm dimensionen av det underrum som spänns upp av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. (2p)

4. Låt $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- (a) Bestäm en ortonomerad bas för $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. (2p)
(b) Bestäm ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. (2p)
(c) Bestäm avståndet från $\mathbf{u}$ till $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. (2p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar.

(Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om A och B är $n \times n$ -matriser, och B är inverterbar, så är $\det(BAB^{-1}) = \det A$. (2p)

(b) Om A och B är två matriser sådana att $AB = BA$ så gäller även att $A^2B = BA^2$. (2p)

(c) Om A är en matris sådan att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ så har matrisen A minst fyra kolonner. (2p)

6. $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ motsvarar spegling i linjen $y = 3x$, uttryckt i termer av standardbasen för $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen A . (3p)

(b) Diagonalisera A . (2p)

7. Visa att varje mängd $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ i $\mathbb{R}^n$ av $p > n$ vektorer är linjärt beroende. (5p)

Lycka till!

Jonny L

Anonym kod	MVE480 Linjär algebra S 160822	sid.nummer 1	Poäng
------------	--------------------------------	-----------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- (a) Bestäm en ekvation för det plan som går genom punkterna $(3, -1, 1)$, $(4, 0, 2)$ och $(6, 3, 1)$. (4p)

Lösning:

Svar:

- (b) Ekvationssystemet $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$ är givet. (3p)

Bestäm x_2 med hjälp av Cramers regel.

Lösning:

Svar:

(c) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$. (4p)

Lösning:

Svar:

(d) Bestäm baser för $\text{Col } A$ och $\text{Nul } A$ då (4p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Lösningar MVE480, Linjär algebra , 160822

1. (a) Två vektorer i planet fås genom $\mathbf{v}_1 = (4 - 3, 0 + 1, 2 - 1) = (1, 1, 1)$ och $\mathbf{v}_2 = (6 - 3, 3 + 1, 1 - 1) = (3, 4, 0)$. Om vi nu tar $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ får vi en vektor som är vinkelrät mot båda dessa vektorer, som då är en normalvektor till det sökta planet.

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{k} = (-4, 3, 1).$$

Insättning i planets ekvation ger

$$-4(x - 3) + 3(y + 1) + 1(z - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 3y - z - 14 = 0.$$

(b) $x_2 = \frac{\det(A_2(\mathbf{b}))}{\det(A)}$, där $\det(A_2(\mathbf{b})) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7$ och $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 2$,

så
 $x_2 = \frac{7}{2}.$

- (c) Vi börjar med att ta fram egenvärdena

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 7 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 16 = 0$$

Egenvärdena är alltså $\lambda_1 = 4$ och $\lambda_2 = -4$. Vi söker egenvektorn tillhörande egenvärdena. $\lambda_1 = 4$.

$$A - \lambda_1 I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har att x_1 är en bunden variabel och x_2 är en fri variabel, vilket ger

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och därmed har vi att $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor.

$\lambda_1 = -4$.

$$A - \lambda_2 I_2 = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har att x_1 är en bunden variabel och x_2 är en fri variabel, vilket ger

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -7x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

och därmed har vi att $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}$ är en egenvektor.

- (d) Upprepade radoperationer ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser att första och andra kolonnen är pivotkolonner, så

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ är en bas för kolonnrummet.

Vi läser av att

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2x_3 - 3x_4 \\ -6x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De två vektorerna i högerledet bildar en bas för nollrummet.

2. (a) Se boken!

(b) Minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{x}}$ löser normalekvationerna $A^T A \hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \\ 12 \\ 17 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 18 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}. \text{ Minstakvadratlösningen ges alltså av}$$

$$(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -18 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$y = 3x + 1$ minimerar minstakvadratfelet.

3. (a) Se boken!

(b) Vi radreducerar matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & -1 & h-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & h-3 \end{bmatrix}.$$

Om $h \neq 3$ är alla kolonner pivotkolonner och dimensionen är 3.

Om $h = 3$ är endast de två första kolonnerna pivotkolonner, dvs kolonnerna spänner upp ett plan och är linjärt beroende och dimensionen är 2.

4. (a) Först byter vi ut $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ mot en ortogonalbas via Gram-Schmidt processen. Tag $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$ och vi får

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1} \right) \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{För att underlätta väljer vi } \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Normalisering ger sedan en ON-bas $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ med

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Kalla $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ för V . Vi har då

$$\text{Proj}_V \mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1} \right) \mathbf{w}_1 + \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2} \right) \mathbf{w}_2 = \frac{2}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{3}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(c) \text{ Avståndet } = \|\mathbf{u} - \text{Proj}_V \mathbf{u}\| = \left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{42}.$$

5. (a) Sant. Med hjälp av produktformeln för determinanter $\det(CD) = \det(C)\det(D)$, och att $\det(I_n) = 1$, där I_n är enhetsmatrisen, så får man att $\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)}$. Dessutom gäller produktformeln för fler än två determinanter, och vi får att

$$\det(BAB^{-1}) = \det(B)\det(A)\det(B^{-1}) = \det(B)\det(A)\frac{1}{\det(B)} = \det(A).$$

- (b) Sant. $A^2B = (AA)B = A(AB) = A(BA) = (AB)A = (BA)A = B(AA) = BA^2$.
 (c) Sant. Att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ medför att $\text{Col}(A)$ har dimensionen 4, och då måste det uppenbarligen finnas minst 4 kolonner i A .

6. (a) Låt $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Eftersom $\mathbf{v}_1$ är en riktningsvektor till linjen och $\mathbf{v}_2$ är en normal till linjen så har vi att $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$ och $T(\mathbf{v}_2) = -\mathbf{v}_2$ så $\mathbf{v}_1$ är en egenvektor till A med egenvärdet $\lambda_1 = 1$ och $\mathbf{v}_2$ är en egenvektor till A med egenvärdet $\lambda_2 = -1$.

- (b) Detta medför direkt att vi har diagonaliseringen $A = PDP^{-1}$ med

$$P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

så

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}.$$

7. Se boken, sats 1.7.8.