

MVE480 Linjär algebra

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkändtdelen). Bonuspoäng från duggor 2017 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 35 resp. 45 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 8 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkändtdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (15p)

2. (a) Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$
 (2p)

(b) Skriv vektorn $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}^T$ som en linjärkombination av vektorerna $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}^T$. (2p)

(c) Är vektorerna $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}^T$ en linjärt oberoende mängd av vektorer? (1p)

3. (a) Definera vad som menas med ett egenvärde och en egenvektor till en $n \times n$ matris A . (2p)

(b) Låt A vara en 2×2 matris för vilken vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ är egenvektorer med respektive egenvärden 1 och 2. Bestäm matrisen A . (3p)

4. (a) Låt T vara den linjära avbildning $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ som defineras genom

$$T(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 - x_3).$$

Ange avbildningens standardmatris. (2p)

(b) Ange standardmatrisen för den linjära avbildning $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ som består av en rotation 180 grader runt x_3 -axeln följt av en spegling i x_1x_2 -planet. (3p)

5. (a) Definera vad som menas med ett underum i $\mathbb{R}^n$. (2p)

(b) Vektorerna

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$$

utgör en bas för ett underum W i $\mathbb{R}^4$. Bestäm en ortogonal bas för W . (4p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar.

(Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om A är en $m \times n$ matris med $m < n$ så har $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oändligt många lösningar. (1p)

(b) Om $A \sim B$ är radekvivalenta $n \times n$ matriser, så har A och B samma egenvärden. (2p)

(c) Låt $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning vars avbildningsmatris är $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
Då är T surjektiv. (2p)

7. Låt $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som ges av formeln

$$T(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2$$

$$\text{då } \mathbf{v}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Vad har avbildningen T för geometrisk tolkning? (1p)

(b) Bestäm T 's avbildningsmatris i en bas bestående av T 's egenvektorer. (2p)

(c) Bestäm T 's avbildningsmatris i standardbas. (2p)

8. Bevisa att om A är en inverterbar $n \times n$ matris och $\mathbf{b}$ är en vektor i $\mathbb{R}^n$ så har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ den entydiga lösningen $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. (4p)

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	MVE480 Linjär algebra 170313	sid.nummer 1	Poäng
------------	------------------------------	-----------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna determinanten till matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar:

(b) Bestäm inversen till matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar:

- (c) För vilket värde på konstanten a ligger vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \end{bmatrix}^T$ i samma plan? (3p)

Lösning:

Svar:

VÄND!

(d) Matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ är given. (3p)

- i. Bestäm $\text{rank}(A)$.
- ii. Bestäm dimensionen av $\text{Nul}(A)$.

Lösning:

Svar:

- (e) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller punkten $(1, 2, 1)$ och är vinkelrät mot de båda planen $x + y = 2$ och $2x + y - z = 0$. (3p)

Lösning:

1. (a) Vi utvecklar först efter 2:a kolonnen och därefter utvecklar vi efter 3:e kolonnen och får

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (-2)(-2) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot (18 - 10) = 32.$$

- (b) Vi tar fram inversen till A genom Jacobis metod.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

så

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (c) Vi vet att om $\det(A) = 0$ så är kolonvektorerna i A linjärt beroende vilket innebär att de tre vektorerna ligger i samma plan.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & a \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & a \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -3a - 8 = 0$$

$$\text{då } a = -\frac{8}{3}.$$

- (d) Vi börjar med att radreducera matrisen A .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har pivotkolonner i kolonn 1, 2, 4 vilket innebär att Kolonn 1, 2, 4 i matrisen A bildar en bas och $\dim \text{Col}(A) = 3$.

$\dim \text{Nul}(A) + \dim \text{Col}(A) = n, (n=4)$, så $\dim \text{Nul}(A) = 1$.

- (e) Normalvektorer till de båda givna planen är $\mathbf{n}_1 = (1, 1, 0)$ och $\mathbf{n}_2 = (2, 1, -1)$. Båda dessa vektorer är parallella med det sökta planet. Om vi nu tar $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ får vi en vektor som är vinkelrät mot båda dessa vektorer, som då är en normalvektor till det sökta planet.

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k} = (-1, 1, -1).$$

Insättning i planets ekvation ger

$$-1(x - 1) + 1(y - 2) + 1(z - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - y + z = 0.$$

2. (a) Systemets totalmatris överförs till reducerad trappstegsform..

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolonn 1 och 2 är pivotkolonner vilket betyder att x_1 och x_2 är bundna variabler. x_3 är en fri variabel.

$$x_1 = 4 + 2t,$$

$$x_2 = 2 + t,$$

$$x_3 = t$$

.

- (b) Tag t.ex. $t = 1$ i lösningen ovan och vi har då att

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

- (c) Nej, i så fall skulle systemet i a) haft entydig lösning.

3. (a) Se boken.

- (b) Matrisen A har två olika egenvärden och är därmed enligt sats diagonaliserbar med $A = PDP^{-1}$ där

$$P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

och vi får då

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

4. (a)

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A\mathbf{x}$$

så

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- (b)

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &\rightarrow -\mathbf{e}_1 \rightarrow -\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 &\rightarrow -\mathbf{e}_2 \rightarrow -\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 &\rightarrow \mathbf{e}_3 \rightarrow -\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Standarmatrisen för den linjära avbildning som först roterar och sedan speglar är då

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

5. (a) Se boken.

(b) Vi tillämpar Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocedur.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

En ortogonal bas är t.ex.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

6. (a) Sant. Matrisen A kan maximalt ha ett pivotelement per rad, vilket innebär maximalt m pivotkolonner. Alltså finns minst $n - m > 0$ fria variabler. Fria variabler ger oändligt många lösningar.

(b) Falskt. Med $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ har vi att $A \sim B$, men

$$\det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda - 2) \text{ och } \det(B - \lambda I) = \lambda(1 - \lambda)$$

och vi ser att egenvärdena är olika.

(c) Avbildningen $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är surjektiv om och endast om kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^m$ (sats 1.9.12). I vårt fall har vi pivotelement i varje rad vilket innebär att kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^2$ (sats 1.4.4), vilket då enligt sats ovan säger att avbildningen är surjektiv.

7. (a) Vi ser att $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, så $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är ortogonala mot varandra. Därför ger $T(\mathbf{x})$ den ortogonala projektionen av vektorn $\mathbf{x}$ på planet som spänns upp av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$.

(b) Vektorerna $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är egenvektorer till avbildningen T som hör till egenvärdet 1. En normal till planet är en egenvektor med tillhörande egenvärde 0.

Om $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{n}\}$, så är β en bas av T 's egenvektorer och T 's avbildningsmatris

$$\text{respektive denna bas är } [T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) T 's avbildningsmatris respektive standardbasen $\varepsilon = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ är $[T]_\varepsilon = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & T(\mathbf{e}_3) \end{bmatrix}$.

$$\text{Ur } T(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 \text{ fås}$$

$$T(\mathbf{e}_1) = \dots = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\mathbf{e}_2) = \dots = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(\mathbf{e}_3) = \dots = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$[T]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

8. Se boken, sats 2.2.5.