

MVE480 Linjär algebra

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkändtdelen). Bonuspoäng från duggor 2017 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 35 resp. 45 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 8 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkändtdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad (15p)
inlämnas tillsammans med övriga lösningar.

2. (a) Bestäm skalären p i matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 9 & p \end{bmatrix}$$

så att ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har icke-trivial lösning. (3p)

- (b) Låt $p = 0$ i matrisen A . Lös med hjälp av Cramers regel x_3 ur ekvationssystemet (3p)

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

3. Låt matrisen $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$.

- (a) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till A . (3p)

- (b) Bestäm en formel för A^k . (3p)

4. Beräkna (med minsta kvadratmetoden) en approximativ lösning till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = -4 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}.$$

Beräkna också medelfelet. (5p)

Obs! Om $\hat{\mathbf{x}}$ är minsta kvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ och n är antalet mätdata, så är medelfelet $\epsilon = \|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|/\sqrt{n}$.

5. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$. Bestäm en ortogonalbas för $\text{Col}(A)$. (4p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar.

(Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Alla plan i $\mathbb{R}^3$ är underrum till $\mathbb{R}^3$. (1p)

(b) Produkten av två ortogonala matriser är en ortogonal matris. (2p)

(c) $\text{Nul}(A^T)$ är lika med ortogonala komplementet till $\text{Nul}(A)$. (2p)

7. Låt $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara en linjära avbildning med standardmatrisen $A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.

Visa att F är en spegling i någon linje genom origo. Finn även denna linje. (5p)

8. Bevisa att om $A = PBP^{-1}$ så har A och B samma egenvärden. (4p)

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	MVE480 Linjär algebra 170608	sid.nummer 1	Poäng
------------	------------------------------	-----------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. (3p)

Lös matrisekvationen $X = BX + A$

Lösning:

Svar:

- (b) Låt $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^3$ som uppfyller villkoren $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 5$ och $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (3, 0, 4)$. Bestäm vinkeln mellan de båda vektorerna $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$. (3p)

Lösning:

Svar:

- (c) Bestäm volymen av parallelepipederna som spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = [0 \ 2 \ 3]^T$, $\mathbf{v}_2 = [5 \ 2 \ 2]^T$ och $\mathbf{v}_3 = [3 \ 2 \ 1]^T$ i $\mathbb{R}^3$. (2p)

Lösning:

Svar:

VÄND!

(d) Låt $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som uppfyller (4p)

$$T \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Bestäm matrisen för T (i standardbas) samt $T \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Lösning:

Svar:

(e) En rät linje går genom punkten $(1, 2, 3)$ och är vinkelrät mot planet med ekvationen $x - 3y + z = 0$. Bestäm linjens ekvationer, både i parameterform och i parameterfri form. (3p)

Lösning:

1. (a) $X = BX + A \Leftrightarrow IX - BX = A \Leftrightarrow (I - B)X = A \Leftrightarrow (I - B)^{-1}(I - B) = (I - B)^{-1}A \Leftrightarrow X = (I - B)^{-1}A$

$$I - B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \text{ och vi får } (I - B)^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Så

$$X = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -9 & -6 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

- (b) Vi har att

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |a||b| \cos \theta \text{ och att } |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |a||b| \sin \theta.$$

Löser vi ut $\cos \theta$ och $\sin \theta$ i formlerna ovan får vi

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} = \frac{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}}{5} = 1$$

Så

$$\tan \theta = 1, \text{ vilket ger att } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

- (c) Vi får volymen genom att beräkna följande determinant.

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 6 = 14.$$

- (d) Kalla $T : s$ matris för A_T . De två givna ekvationerna kan slås ihop till en matrisekvation

$$A_T \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A_T = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \dots = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Slutligen har vi

$$T \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

- (e) En normalvektor till planet är $(1, -3, 1)$. Eftersom den sökta linjen är vinkelrät mot planet har vi att en riktningsvektor till linjen är $(1, -3, 1)$. Linjen på parameterform blir då

$$x = 1 + t, y = 2 - 3t, z = 3 + t$$

och på parameterfri form

$$x - 1 = \frac{y - 2}{-3} = z - 3.$$

2. (a) Upprepade radoperationer ger

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & p+7 \end{bmatrix}.$$

Att $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har icke-trivial lösning är ekvivalent med att det inte finns pivotelement i varje rad. Vi ser att detta gäller endast för $p = -7$.

(b) Vi har

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 9 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-28}{-28} = 1$$

3. (a) Egenvärden är lösningar till karakteristiska ekvationen: $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9 - \lambda & 2 \\ 2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \text{ ger egenvärdena } 5 \text{ och } 10.$$

Vi söker egenvektorn tillhörande egenvärdena. $\lambda_1 = 5$.

$$A - \lambda_1 I_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har att x_1 är en bunden variabel och x_2 är en fri variabel, vilket ger

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -2x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

och därmed har vi att $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ är en egenvektor.

$\lambda_2 = 10$.

$$A - \lambda_2 I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har att x_1 är en bunden variabel och x_2 är en fri variabel, vilket ger

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och därmed har vi att $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor.

(b) $A^k = PD^kP^{-1}$ där

$$P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

och vi får då

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 10^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \dots = \frac{1}{5} \left(5^k \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 10^k \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

4. Minsta-kvadratmetodens lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ är lösningen till $A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{y}$.

Så

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{y} = \frac{1}{53} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 14 \end{bmatrix} = \frac{2}{53} \begin{bmatrix} 29 \\ 56 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Medelfelet } \epsilon = \|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|/\sqrt{n} = \dots = \frac{1}{53\sqrt{3}} \sqrt{102^2 + 158^2 + 32^2}.$$

5. Kalla kolumnerna för $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. Vi byter ut dem mot tre ortogonala vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ via Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocedur.

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{3}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} - \frac{9}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{21}{7} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

6. (a) **Falskt.** Plan som inte går genom origo är inte underrum eftersom nollvektorn inte ingår då.
(b) **Sant.** $(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = B^T IB = B^T B = I$.
(c) **Falskt.** Om A inte är kvadratisk ligger de inte ens i samma $\mathbb{R}^n$. Om t.ex. A är en 3×5 matris så är $\text{Nul}(A^T)$ en del av $\mathbb{R}^3$ medan ortogonala komplementet till $\text{Nul}(A)$ är en del av $\mathbb{R}^5$.
7. För att visa att F är en spegling skall man bevisa att F (eller respektive matrisen) har två ortogonala egenvektorer med -1 och 1 som egenvärden. Den karakteristiska ekvationen för A är

$$\det(A - \lambda I_2) = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 3 - 5\lambda & 4 \\ 4 & -3 - 5\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{25} ((3 - 5\lambda)(-3 - 5\lambda) - 16) = 1 - \lambda^2 = 0$$

då $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -1$.

Eftersom matrisen är **symmetrisk** blir respektive egenvektorer ortogonala mot varandra. Detta visar att F är en spegling.

För att bestämma linjen som F speglar i, skall man bestämma en egenvektor tillhörande egenvärdet $\lambda = 1$. Den är lösning till ekvationen $(A - I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi kan konstantera att

$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor till $\lambda = 1$. Den sökta linjen går alltså genom 0 och har

riktningsvektor $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, d.v.s. linjen $y = \frac{1}{2}x$.

8. Se boken, sats 5.2.4.