

MVE480 Linjär algebra

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng. Bonuspoäng från duggor 2018 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 35 resp. 45 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkänddelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad (16p)
inlämnas tillsammans med övriga lösningar.

2. (a) Definera vad som menas med att en $n \times n$ matris A är diagonaliserbar. (1p)
(b) Definera begreppet egenvärde till en $n \times n$ matris A . (1p)
(c) Definera vad som menas med att $n \times n$ matriserna A och B är similära. (1p)

3. Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

- (a) Bestäm A^{-1} . (3p)

(b) Visa att $B^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -5 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (1p)

- (c) Bestäm inversen till AB . (2p)

4. Låt matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

- (a) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till A . (3p)

- (b) Ange en ortogonal matris P och en diagonalmatris D sådana att $A = PDP^T$. (1p)

5. Antag att $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$, där $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, och $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, är en bas för ett (5p)

underrum W av $\mathbb{R}^4$. Bestäm en ortogonal bas för W .

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

6. Låt $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar.
(Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

- (a) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ spänner upp $\mathbb{R}^4$. (1p)
- (b) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ är linjärt oberoende. (1p)
- (c) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_4$ spänner upp $\mathbb{R}^4$. (1p)
- (d) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_4$ är linjärt oberoende. (1p)
- (e) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ och $\mathbf{v}_5$ spänner upp $\mathbb{R}^4$. (1p)
- (f) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ och $\mathbf{v}_5$ är linjärt oberoende. (1p)

7. Låt $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som geometriskt betyder en spegling i planet $x + 2y - z = 0$.

- (a) Bestäm F 's egenvärden och egenvektorer, dvs egenvärden och egenvektorer till F 's matris i standardbas. (2p)

- (b) Bestäm $F(\mathbf{v})$ då $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (4p)

8. (a) En minstakvadratlösning $\hat{\mathbf{x}}$ till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har den egenskapen att en viss kvantitet minimeras. Vilken? (1p)
- (b) Tag ditt svar på (a) som definition av minstakvadratlösningen och härled normal-
ekvationen $(A^T A)\hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$. (3p)

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	MVE480 Linjär algebra 180312	sid.nummer 1	Poäng
------------	------------------------------	-----------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- (a) Dela upp vektorn $\mathbf{u} = (1, 1, 2)$ i två komponenter, där den ena är parallell med och den andra är vinkelrät mot vektorn $\mathbf{v} = (2, 3, 2)$. (3p)

Lösning:

Svar:

- (b) Låt $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som först speglar punkter i x -axeln och sedan roterar punkter $\frac{\pi}{2}$ radianer medurs. Ange avbildningens standardmatris. (3p)

Lösning:

Svar:

- (c) Basen $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^2$ består av vektorerna $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Bestäm koordinaterna för vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar:

VÄND!

(d) Ange ett tal h sådant att vektorerna $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{bmatrix}$ (3p)

spänner upp ett plan i $\mathbb{R}^3$.

Lösning:

Svar:

- (e) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller punkterna $(1, 2, 1)$ och $(2, -1, 1)$ samt är parallellt med linjen (4p)

$$x = 4, \quad y = 2 + t, \quad z = -3 + t.$$

Lösning:

Svar: