MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: inga
Datum: 2016-10-25 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Klas Modin
0708 456479

MVE500, TKSAM-2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt krävs 25 poäng på del 1. För betyget 4 krävs 35 poäng totalt, varav minst 6 poäng på del 2. För betyget 5 krävs 45 poäng totalt, varav minst 8 poäng på del 2. Varje godkänd dugga ger 2 bonuspoäng till del 1. Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok.

Del 1 (godkäntnivå)

1. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta (motivering krävs). Om konvergent, beräkna summan. (6p)

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{(n+3)^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{3^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} 2^{3-3n} \cdot 3^{2n-2}$

2. (a) Hitta Maclaurinserien till funktionen $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. (3p)

(b) Bestäm konvergensradien för Maclaurinserien ovan. (2p)

3. (a) Hitta den linjära approximationen till $f(x, y) = (x + 1)^2 + e^x y - y^2$ i punkten $(0, 2)$. (3p)

(b) Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan $x^2+2y^2+2z^2 = 5$ i punkten $(1, 1, 1)$. (3p)

4. Positionen av en partikel vid tidpunkten t beskrivs av $\mathbf{r}(t) = (2\cos \pi t, \sin \pi t)$.

(a) Skissa kurvan som partikeln följer för $0 \le t \le 2$. (2p)

(b) Bestäm partikelns fart då $t = 1$. (2p)

(c) Skriv ner ett uttryck för sträckan partikeln färdas från $t = 0$ till $t = 1$. (Du behöver ej beräkna sträckan!) (2p)

5. Hitta och karaktärisera de stationära punkterna till $f(x, y) = xy - x^3y - xy^3$ som ligger i första kvadranten $x \ge 0$, $y \ge 0$. (5p)

6. Lös värmeledningsekvationen (6p)

$$
\begin{aligned}
u_t &= 3u_{xx} \qquad 0 \le x \le 2, \quad t \ge 0 \\
u_x(0, t) &= u_x(2, t) = 0 \\
u(x, 0) &= \begin{cases} 0 & \text{om } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{om } 1 \le x \le 2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Var god vänd blad!

Del 2 (överbetygsnivå)

7. I havet skjuter en klippa upp vars höjd över havsnivån som funktion av koordinaterna (x, y) beskrivs av

$$h(x, y) = 100 + \frac{2(x+y)}{5} - \frac{3(x^2+y^2)}{100} - \frac{xy}{50}.$$

En expedition ska bestiga toppen av klippan.

(a) Var bör expeditionen landstiga om de vill starta så nära toppen som möjligt? Redogör för lösningsgång och ställ upp ekvationer, men de behöver ej lösas. (3p)

(b) Var bör expeditionen landstiga om de vill starta där lutningen är så liten som möjligt? Redogör för lösningsgång och ställ upp ekvationer, men de behöver ej lösas. (3p)

(Tips: strandkanten ges av nivåkurvan $h(x, y) = 0$.)

8. Beräkna summan av serien (5p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

genom användning av cosinusserien till funktionen

$$f(x) = x(\pi - x), \qquad 0 \le x \le \pi.$$

9. En stav av längd 1 (enhet m) har en initial temperaturfördelningen (i °C) som ges av $10 + 10\cos \pi x$, för $0 \le x \le 1$. Formulera och lös värmeledningsekvationen för staven, om temperaturen hålls konstant 20°C vid $x = 0$ och 0°C vid $x = 1$. Värmeledningskoefficienten för staven är 3 (enhet m^2/s). (5p)

Lycka till!
Klas M

Formelblad MVE500, HT-2016

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \qquad \sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$$

Integraler

$$\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C \qquad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 \qquad \int \sqrt{a - x^2} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a - x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a + x^2}} \, dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C, \quad a \neq 0 \qquad \int \sqrt{a + x^2} \, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a + x^2} + a \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|\right) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + \dots \qquad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad |x| \leq 1$$

Fourierserier

Jämn funktion $f(x) = f(-x)$
Udda funktion $f(x) = -f(-x)$

Fourierserien av en $2L$-periodisk funktion $f(x)$ ges av

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

där **Fourierkoefficienterna** ges av

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Den **komplex Fourierserien** av en $2L$-periodisk funktion $f(x)$ ges av

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

där de **komplexa Fourierkoefficienterna** ges av

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}\,dx$$

Sinusserien av $f(x)$ definierad på intervallet $x \in [0, L]$ ges av

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\,, \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Cosinusserien av $f(x)$ definierad på intervallet $x \in [0, L]$ ges av

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}\,, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Parsevals identitet för en $2L$-periodisk funktion $f(x)$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$