MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola — Datum: 2016-10-25 kl. 08.30–12.30

Tentamen — Telefonvakt: Klas Modin

0708 456479

MVE500, TKSAM-2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt krävs 25 poäng på del 1. För betyget 4 krävs 35 poäng totalt, varav minst 6 poäng på del 2. För betyget 5 krävs 45 poäng totalt, varav minst 8 poäng på del 2. Varje godkänd dugga ger 2 bonuspoäng till del 1. Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok.

Del 1 (godkäntnivå)

1. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta (motivering krävs). Om konvergent, beräkna summan. (6p)

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{(n+3)^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{3^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} 2^{3-3n} \cdot 3^{2n-2}$

Lösning: (a) $a_n = n(n+2)/(n+3)^2$. Låt $b_n = n^2/(n+3)^2$. Då gäller $a_n > b_n$. Dessutom

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+3/n)^2} = 1 \neq 0.$$

Alltså är serien divergent.

(b) $\cos n\pi$ är -1 om n är udda och 1 om n är jämn. Alltså, $\cos n\pi = (-1)^n$, vilket ger den geometriska serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

Här är $r = -1/3$ och $a = -1/3$. Eftersom $|r| < 1$ så är serien konvergent. Summan ges av $S = a/(1-r) = (-1/3)/(1+1/3) = -1/4$.

(c) Potenslagarna ger

$$2^{3-3n} \cdot 3^{2n-2} = 2^3 3^{-2} (2^{-3})^n (3^2)^n = \frac{8}{9}\left(\frac{9}{8}\right)^n.$$

Vi har alltså en geometrisk serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{8}{9}\left(\frac{9}{8}\right)^n.$$

Eftersom $r = 9/8 > 1$ så är serien divergent.

2. (a) Hitta Maclaurinserien till funktionen $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. (3p)

(b) Bestäm konvergensradien för Maclaurinserien ovan. (2p)

Lösning: (a) Maclaurinserien till $f(x)$ ges av

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Vi har

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{3 \cdot 2}{(1-x)^4}, \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

Alltså, $f^{(n)}(0) = n!$, vilket ger serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

(b) Termerna i serien ges av $a_n = x^n$. Kvotkriteriet ger $|a_{n+1}/a_n| = |x^{n+1}/x^n| = |x|$. För konvergens krävs alltså $|x| < 1$ vilket betyder att konvgergensradien är 1.

3. (a) Hitta den linjära approximationen till $f(x,y) = (x+1)^2 + e^x y - y^2$ i punkten $(0,2)$. (3p)

(b) Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan $x^2+2y^2+2z^2 = 5$ i punkten $(1,1,1)$. (3p)

Lösning: (a) Den linjära approximationen i punkten $(0,2)$ ges av

$$L(x,y) = f(0,2) + f_x(0,2)x + f_y(0,2)(y-2).$$

Vi har $f(0,2) = -1$, $f_x(0,2) = 2+2 = 4$, $f_y(0,2) = 1 - 2 \cdot 2 = -3$. Alltså,

$$L(x,y) = -1 + 4x + -3(y-2) = 4x - 3y + 5.$$

(b) Låt $z = f(x,y)$. Implicit differentiering ger då

$$2x + 4f f_x = 0, \qquad 4y + 4f f_y = 0.$$

Alltså, $f_x = -x/(2f)$ och $f_y = -y/f$. Eftersom $f(1,1) = z = 1$ får vi $f_x(1,1) = -1/2$ och $f_y(1,1) = -1$. Tangentplanet ges därmed av

$$z - 1 = -\frac{1}{2}(x-1) - 1(y-1) \iff x + 2y + 2z = 5$$

4. Positionen av en partikel vid tidpunkten t beskrivs av $\mathbf{r}(t) = (2\cos \pi t, \sin \pi t)$.

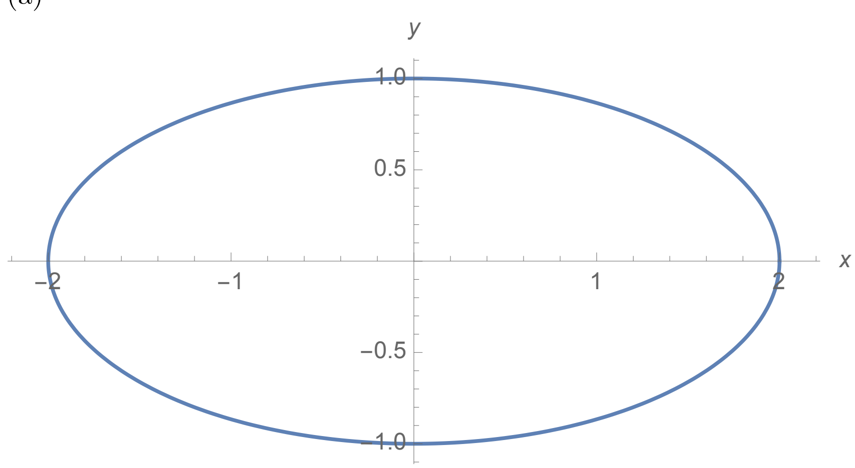
(a) Skissa kurvan som partikeln följer för $0 \leq t \leq 2$. (2p)

(b) Bestäm partikelns fart då $t = 1$. (2p)

(c) Skriv ner ett uttryck för sträckan partikeln färdas från $t = 0$ till $t = 1$. (Du behöver ej beräkna sträckan!) (2p)

Lösning:

(a)



(b) Hastighetsvektorn ges av derivatan. Alltså $\mathbf{v} = \mathbf{r}'(1) = (-2\pi \sin \pi 1, \pi \cos \pi 1) = (0, -\pi)$. Farten är längden av hastighetsvektorn, alltså π.

(c) Uttrycket ges av kurvlängden

$$\int_0^1 |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_0^1 \sqrt{(-2\pi \sin \pi t)^2 + (\pi \cos \pi t)^2}\, dt = \pi \int_0^1 \sqrt{4 \sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t}\, dt$$

5. Hitta och karaktärisera de stationära punkterna till $f(x, y) = xy - x^3 y - xy^3$ som ligger i första kvadranten $x \geq 0$, $y \geq 0$. (5p)

Lösning: Stationär punkt betyder $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$, vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} y - 3x^2 y - y^3 = 0 \\ x - x^3 - 3xy^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y(1 - 3x^2 - y^2) = 0 \\ x(1 - x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases}$$

Alternativen är:
$x = y = 0$, ger $(0, 0)$
$x = 0$ och $1 - 3x^2 - y^2 = 0$, ger $(0, \pm 1)$
$y = 0$ och $1 - x^2 - 3y^2 = 0$, ger $(\pm 1, 0)$
$1 - 3x^2 - y^2 = 0$ och $1 - x^2 - 3y^2 = 0$, ger

$$1 - x^2 - 3(1 - 3x^2) = 0 \iff 8x^2 = 2 \iff x = \pm 1/2, \quad \Rightarrow \quad y^2 = 1/4 \iff y \pm 1/2$$

vilket ger $(\pm 1/2, \pm 1/2)$.

De stationära punkter som ligger i första kvadranten är alltså

$$(0, 0), \quad (0, 1), \quad (1, 0), \quad (1/2, 1/2).$$

6. Lös värmeledningsekvationen (6p)

$$\begin{aligned} u_t &= 3u_{xx} \qquad 0 \leq x \leq 2, \quad t \geq 0 \\ u_x(0, t) &= u_x(2, t) = 0 \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 0 & \text{om } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{om } 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Lösning: Detta är en homogen värmeledningsekvation med homogena Neumann-villkor. Variabelseparationsansatsen ger att lösningen måste vara på formen

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-3n^2\pi^2 t/4} \cos \frac{n\pi x}{2}.$$

Begynnelsevillkoren ger

$$a_n = \int_1^2 \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx.$$

Alltså, $a_0 = 1$ och för $n \geq 1$ gäller

$$a_n = \left[\frac{\sin \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \right]_1^2 = \frac{2}{n\pi} \left(\underbrace{\sin n\pi}_{0} - \sin \frac{n\pi}{2} \right)$$

Lösningen är alltså

$$u(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin(n\pi/2)}{n} e^{-3n^2\pi^2 t/4} \cos \frac{n\pi x}{2}$$

Var god vänd blad!

Del 2 (överbetygsnivå)

7. I havet skjuter en klippa upp vars höjd över havsnivån som funktion av koordinaterna (x, y) beskrivs av

$$h(x,y) = 100 + \frac{2(x+y)}{5} - \frac{3(x^2+y^2)}{100} - \frac{xy}{50}.$$

En expedition ska bestiga toppen av klippan.

(a) Var bör expeditionen landstiga om de vill starta så nära toppen som möjligt? Redogör för lösningsgång och ställ upp ekvationer, men de behöver ej lösas. (3p)

(b) Var bör expeditionen landstiga om de vill starta där lutningen är så liten som möjligt? Redogör för lösningsgång och ställ upp ekvationer, men de behöver ej lösas. (3p)

(Tips: strandkanten ges av nivåkurvan $h(x,y) = 0$.)

Lösning: (a) Eftersom toppen måste vara en stationär punkt uppfyller den $\nabla h(x,y) = 0$. Ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2 - \frac{3x+y}{10} &= 0 \\ 2 - \frac{x+3y}{10} &= 0 \end{aligned}$$

Det finns en lösning: $(5,5)$. Koordinaterna för toppen är alltså $\mathbf{t} = (5,5)$.

Strandkanten ges av $h(x,y) = 0$. Vi vill alltså hitta det kortaste avståndet till toppen $\mathbf{t}$ under bivillkoret $h(x,y) = 0$. Vi vill alltså minimera t.ex. funktionen

$$f(x,y) = |(x,y) - \mathbf{t}|^2 = (x-5)^2 + (y-5)^2$$

under bivillkoret $h(x,y) = 0$. Lagrange multiplikatormetoden ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2x - 10 &= \lambda\left(\frac{2}{5} - \frac{3x+y}{50}\right) \\ 2y - 10 &= \lambda\left(\frac{2}{5} - \frac{x+3y}{50}\right) \\ 0 &= 100 + \frac{2(x+y)}{5} - \frac{3(x^2+y^2)}{100} - \frac{xy}{50} \end{aligned}$$

Om man får flera lösningar (vilket är fallet här), undersöker man vilken lösning som ger det minsta värdet på $f(x,y)$.

(b) Detta problemet är snartlikt det första, men istället för att minimera avståndet till toppen vill vi minimiera strandlutningen. Denna ges av gradienten längden av $h(x,y)$. Alltså, vi vill minimiera t.ex. funktionen

$$f(x,y) = |\nabla h(x,y)|^2 = \left(\frac{2}{5} - \frac{3x+y}{50}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - \frac{x+3y}{50}\right)^2$$

under bivillkoret $h(x,y) = 0$. Detta görs med Lagrange multiplikatormetoden, genom att ställa upp ekvationen $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla h(x,y)$. Ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned} -\frac{3}{50}\left(\frac{2}{5} - \frac{3x+y}{50}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{2}{5} - \frac{x+3y}{50}\right) &= \lambda\left(\frac{2}{5} - \frac{3x+y}{50}\right) \\ -\frac{1}{50}\left(\frac{2}{5} - \frac{3x+y}{50}\right) - \frac{3}{5}\left(\frac{2}{5} - \frac{x+3y}{50}\right) &= \lambda\left(\frac{2}{5} - \frac{x+3y}{50}\right) \\ 100 + \frac{2(x+y)}{5} - \frac{3(x^2+y^2)}{100} - \frac{xy}{50} &= 0 \end{aligned}$$

Om man får flera lösningar (vilket är fallet här), undersöker man vilken lösning som ger det minsta värdet på $f(x, y)$.

8. Beräkna summan av serien (5p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

genom användning av cosinusserien till funktionen

$$f(x) = x(\pi - x), \qquad 0 \leq x \leq \pi.$$

Lösning:

Cosinuserien till $f(x)$ ges av

$$\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} - 1}{4n^2} \cos nx = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2nx.$$

Välj $x = \pi/2$, vilket ger

$$f(\pi/2) = \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Alltså

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

9. En stav av längd 1 (enhet m) har en initial temperaturfördelningen (i °C) som ges av $10 + 10\cos \pi x$, för $0 \leq x \leq 1$. Formulera och lös värmeledningsekvationen för staven, om temperaturen hålls konstant 20°C vid $x = 0$ och 0°C vid $x = 1$. Värmeledningskoefficienten för staven är 3 (enhet m^2/s). (5p)

Lösning: Värmeledningsekvationen ges av

$$\begin{aligned} u_t &= 3u_x x, \qquad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0 \\ u(0,t) &= 20, \quad u(1,t) = 0 \\ u(x,0) &= 10 + 10\cos \pi x \end{aligned}$$

Ekvationen är icke-homogen på grund av det icke-homogena Dirichletvillkoret. Ansätt alltså en lösning på formen $u(x, t) = v(x, t) + s(x)$. Detta ger

$$v_t = 3v_x x + 3s''.$$

För att $v(x, t)$ ska uppfylla värmeledningsekvationen krävs att $3s''(x) = 0$. Dessutom ska $s(x)$ uppfylla randvillkoren $s(0) = 20$ och $s(1) = 0$. Detta ger

$$s(x) = 20 - 20x.$$

$v(x, t)$ uppfyller därmed homogena Dirichletproblem. Dessutom får vi från begynnelsevillkoret att

$$v(x,0) + s(x) = 10 + 10\cos \pi x \iff v(x,0) = 10(\cos \pi x - 1 + 2x).$$

Variabelseparation ger nu att $v(x,t)$ är på formen

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-3n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x).$$

Begynnelsevillkoret för v ger

$$\begin{aligned} b_n &= 2\int_0^1 10(\cos\pi x - 1 + 2x)\sin(n\pi x)\,dx = 10\int_0^1 (2\cos\pi x\sin n\pi x - 2\sin n\pi x + 4x\sin n\pi x)\,dx \\ &= 10\int_0^1 (\sin(n\pi x - \pi x) + \sin(n\pi x + \pi x) - 2\sin n\pi x + 4x\sin n\pi x)\,dx = \dots \\ &= \begin{cases} 0 & \text{om } n = 1 \\ \frac{20}{\pi}\frac{1+(-1)^n}{n^3-n} & \text{om } n > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Alltså,

$$v(x,t) = \frac{20}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^3-n} e^{-3n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$$

vilket ger

$$u(x,t) = 20 - 20x + \frac{20}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^3-n} e^{-3n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$$

Lycka till!
Klas M

Formelblad MVE500, HT-2016

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \qquad \sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$$

Integraler

$$\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C \qquad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 \qquad \int \sqrt{a - x^2} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a - x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a + x^2}} \, dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C, \quad a \neq 0 \qquad \int \sqrt{a + x^2} \, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a + x^2} + a \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|\right) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + \dots \qquad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad |x| \leq 1$$

Fourierserier

Jämn funktion $f(x) = f(-x)$
Udda funktion $f(x) = -f(-x)$

Fourierserien av en $2L$-periodisk funktion $f(x)$ ges av

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

där **Fourierkoefficienterna** ges av

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Den **komplex Fourierserien** av en $2L$-periodisk funktion $f(x)$ ges av

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

där de **komplexa Fourierkoefficienterna** ges av

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}\,dx$$

Sinusserien av $f(x)$ definierad på intervallet $x \in [0, L]$ ges av

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\,, \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Cosinusserien av $f(x)$ definierad på intervallet $x \in [0, L]$ ges av

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}\,, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Parsevals identitet för en $2L$-periodisk funktion $f(x)$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$