**MATEMATIK** | **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola | Datum: 2016-12-20 kl. 08.30–12.30

Tentamen | Telefonvakt: Olof Giselsson

031 772 5325

# MVE500, TKSAM-2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt krävs 25 poäng på del 1. För betyget 4 krävs 35 poäng totalt, varav minst 6 poäng på del 2. För betyget 5 krävs 45 poäng totalt, varav minst 8 poäng på del 2. Varje godkänd dugga ger 2 bonuspoäng till del 1.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok.

---

## Del 1 (godkäntnivå)

**1**. Avgör om talföljderna (sekvenserna) $a_1, a_2, a_3, \ldots$ är konvergenta eller divergenta (fullständig motivering krävs). (6p)

(a) $a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}}$ (b) $a_n = \dfrac{(-1)^n n^3}{n^3+2n^2+1}$ (c) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 4 - a_n$ för $n \geq 1$

**Svar:** (a) Konvergent

(b) Divergent

(c) Divergent

**2**. (a) Hitta Taylorserien till funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ i punkten $x = 16$. (3p)

(b) Bestäm konvergensradien för Taylorserien ovan. (2p)

**Svar:** (a) Gör variabelsubstitutionen $x = 16 + 16y$. Då gäller

$$f(x) = \sqrt{x} = 4\sqrt{1+y} = 4\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n} y^n = 4\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}\frac{(x-16)^n}{16^n}$$

(b) Villkoret är $|y| < 1 \iff |x-16| < 16$. Konvergensradien är alltså 16.

**3**. (a) Bestäm längden av kurvan $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, \ln\cos t\rangle$ för $0 \leq t \leq \pi/4$. (3p)

(b) Bestäm krökningen av kurvan $\mathbf{r}(t) = \langle e^t\cos t, e^t\sin t, t\rangle$ i punkten $(1, 0, 0)$. (3p)

**Svar:** (a) $\mathbf{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t, -\tan t\rangle$. Alltså, längden är

$$\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\tan^2 t}\, dt = \frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2}).$$

(b) $\mathbf{r}''(t) = \langle -\cos t, -\sin t, -1/\cos t\rangle$. $(1, 0, 0)$ svarar mot $t = 0$. Krökningen ges därmed av

$$\kappa(0) = \frac{|\mathbf{r}'(0)\times\mathbf{r}''(0)|}{|\mathbf{r}'(0)|^3} = |\langle 0,1,0\rangle \times \langle -1,0,-1\rangle| = \sqrt{2}$$

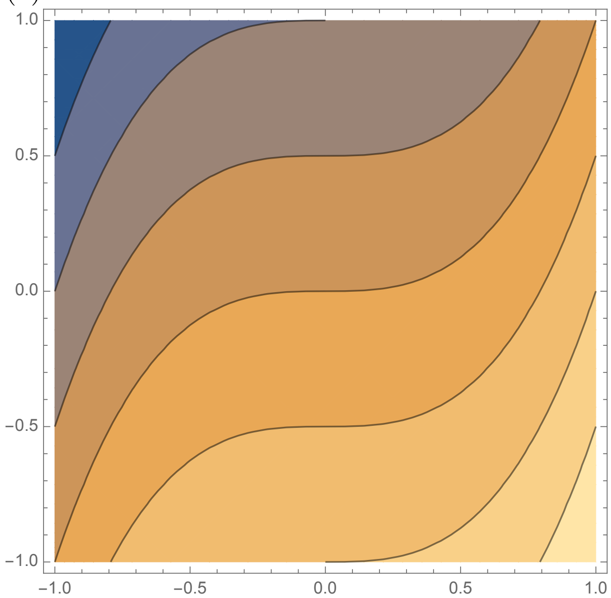
**4**. Låt $f(x, y) = x^3 - y$.

(a) Skissa nivåkurvor till $f$ för $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$. (3p)

(b) Bestäm tangentplanet till $f$ i punkten $(1/2, 0)$. (3p)

**Svar:**

(a)




(b) $f_x(1/2,0) = 3/4$ och $f_y(1/2,0) = -1$. Dessutom $f(1/2,0) = 1/8$. Planet ges därmed av

$$z = 3/4(x - 1/2) - y + 1/8$$

**5**. Hitta och karaktärisera de stationära punkterna till $f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$. (5p)

**Svar:** Det finns två stationära punkter: $(0,0)$ och $(2,1)$. Den första är en sadelpunkt. Den andra är ett lokalt minimum.

**6**. Lös värmeledningsekvationen (6p)

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \qquad 0 \le x \le 1, \quad t \ge 0 \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \\ u(x,0) &= 2\sin \pi x + \sin 3\pi x \end{aligned}$$

**Svar:** Detta är en homogen värmeledningsekvation med homogena Dirichlet-villkor. Variabelseparationsansatsen ger att lösningen måste vara på formen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x.$$

Begynnelsevillkoren ger därmed direkt lösningen

$$u(x,t) = 2e^{-\pi^2 t} \sin \pi x + e^{-9\pi^2 t} \sin 3\pi x.$$

Var god vänd blad!

**Del 2 (överbetygsnivå)**

**7**. En rektangulär låda utan lock är konstruerad av $4\,\mathrm{m}^2$ plywood.

(a) Vilken är den största möjliga volymen av lådan? (3p)

(b) Vilka dimensioner (längd, höjd, bredd) har lådan med den största möjliga volymen? (3p)

**Svar:** Se snarlikt exempel i kursboken.

**8**. Du ska bestiga ett berg vars höjd i meter beskrivs av

$$h(x, y) = 1000 - 0.005x^2 - 0.01y^2.$$

Du står i punkten med $x, y$–koordinaterna $(60, 40)$. Positiv $x$-axel pekar åt öster. Positiv $y$-axel pekar åt norr.

(a) Om du börjar gå i sydlig riktning, går du då uppåt eller nedåt? Vad är lutningen i den riktningen? (2p)

(b) Om du börjar gå i nordvästlig riktning, går du då uppåt eller nedåt? Vad är lutningen i den riktningen? (2p)

(c) I vilken riktning är lutningen som störst? (2p)

**Svar:** (a) Uppåt, lutningen är 0.8

(b) Nedåt, lutningen är $-0.28$

(c) Riktningen av gradienten i punkten $(60, 40)$, vilken ges av $\langle -0.6, -0.8 \rangle$, alltså ungefär syd-syd-väst.

**9**. En stav av längd 1 (enhet m) har en initial temperaturfördelningen (i °C) som ges av $10(1 - x)$, för $0 \le x \le 1$. Formulera och lös värmeledningsekvationen för staven, om temperaturen hålls konstant 10°C vid $x = 0$ och 0°C vid $x = 1$. Värmeledningskoefficienten för staven är 1 (enhet $\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$). (5p)

**Svar:** Se snarlikt exempel i Fourieranalyskompendiet.

Lycka till!
Klas M

# Formelblad MVE500, HT-2016

## Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \qquad \sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$$

## Integraler

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 \qquad \int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a+x^2}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0 \qquad \int \sqrt{a+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a+x^2} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|\right) + C$$

## Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + \dots \qquad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad |x| \leq 1$$

## Fourierserier

**Jämn funktion** $f(x) = f(-x)$
**Udda funktion** $f(x) = -f(-x)$

**Fourierserien** av en $2L$-periodisk funktion $f(x)$ ges av

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

där **Fourierkoefficienterna** ges av

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Den **komplex Fourierserien** av en $2L$-periodisk funktion $f(x)$ ges av

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

där de **komplexa Fourierkoefficienterna** ges av

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}\,dx$$

**Sinusserien** av $f(x)$ definierad på intervallet $x \in [0, L]$ ges av

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\,, \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

**Cosinusserien** av $f(x)$ definierad på intervallet $x \in [0, L]$ ges av

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}\,, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

**Parsevals identitet** för en $2L$-periodisk funktion $f(x)$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$