MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2017-08-14 kl. 14.00–18.00
Tentamen Telefonvakt: Anders Hildeman
031 772 5325

MVE500, TKSAM-2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt krävs 25 poäng på del 1. För betyget 4 krävs 35 poäng totalt, varav minst 6 poäng på del 2. För betyget 5 krävs 45 poäng totalt, varav minst 8 poäng på del 2. Varje godkänd dugga ger 2 bonuspoäng till del 1. Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok.

Del 1 (godkäntnivå)

1. Avgör om talserierna är konvergenta eller divergenta (fullständig motivering krävs). (6p)

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{n^4-1}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+4^n}{1+3^n}$

2. (a) Hitta Taylorserien till funktionen $f(x) = e^{2x}$ i punkten $x = 1$. (3p)

(b) Bestäm konvergensradien för Taylorserien ovan. (2p)

3. Positionen av en partikel som funktion av tiden beskrivs av

$$\mathbf{r}(t) = \langle a\cos(kt), b\sin(kt)\rangle$$

där a och b är positiva konstanter och k är ett positivt heltal.

(a) Bestäm partikelns hastighetsvektor[1] vid tiden $t = 2\pi$. (2p)

(b) Skissa partikelns rörelsebana[2] i fallet $a = 2$ och $b = 1$. (2p)

(c) Markera var i rörelsebanan partikelns fart[3] är som lägst i fallet $a = 2$ och $b = 1$. (2p)

4. Låt $f(x, y) = x^2 - y^2$.

(a) Skissa nivåkurvor till f för $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$. (3p)

(b) Bestäm tangentplanet till f i punkten $(1/2, 0)$. (3p)

5. Hitta och karaktärisera de stationära punkterna till $f(x, y) = x + x^2 + y^2$. (5p)

6. Lös värmeledningsekvationen (6p)

$$u_t = u_{xx} \qquad 0 \le x \le 1, \quad t \ge 0$$
$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$
$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x)}{n^2}$$

Var god vänd blad!

---

[1]Eng. *velocity vector*
[2]Eng. *trajectory*
[3]Eng. *speed*

Del 2 (överbetygsnivå)

7. Serien (5p)

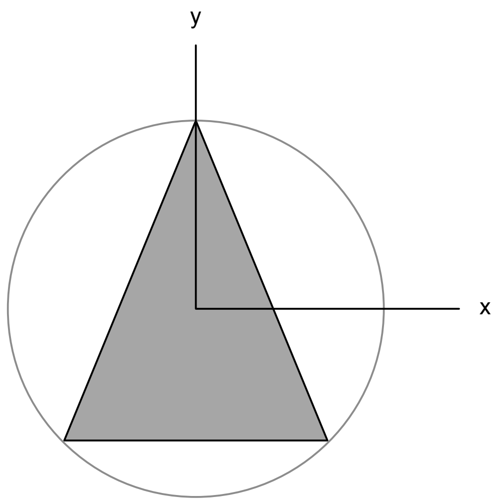
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

definieras av

$$a_1 = 1 \qquad\qquad a_{n+1} = \frac{2+\cos n}{\sqrt{n}} a_n$$

Avgör om serien är konvergent eller divergent (fullständig motivering krävs).

8. Bestäm största arean en likbent triangel kan ha under förutsättning att den ryms inom enhetscirkeln (se figur). (5p)



9. Lös med hjälp av variabelseparation den dämpade vågekvationen (6p)

$$\begin{aligned} u_{tt} + 2u_t - u_{xx} &= 0, && 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0, && t > 0 \\ u(x,0) &= 1, && 0 < x < 1 \\ u_t(x,0) &= 0, && 0 < x < 1 \end{aligned}$$

Lycka till!
Klas M

Formelblad MVE500, HT-2016

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \qquad \sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$$

Integraler

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 \qquad \int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a+x^2}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0 \qquad \int \sqrt{a+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a+x^2} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\right) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + \dots \qquad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad |x| \leq 1$$

Fourierserier

Jämn funktion $f(x) = f(-x)$
Udda funktion $f(x) = -f(-x)$

Fourierserien av en $2L$-periodisk funktion $f(x)$ ges av

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

där **Fourierkoefficienterna** ges av

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Den **komplex Fourierserien** av en $2L$-periodisk funktion $f(x)$ ges av

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

där de **komplexa Fourierkoefficienterna** ges av

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}\,dx$$

Sinusserien av $f(x)$ definierad på intervallet $x \in [0, L]$ ges av

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\,, \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Cosinusserien av $f(x)$ definierad på intervallet $x \in [0, L]$ ges av

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}\,, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Parsevals identitet för en $2L$-periodisk funktion $f(x)$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$