Tentamensträning PDE, Godkäntnivå lösningar, MVE500. HT-2016

Notera: svängningsproblem = vågekvation

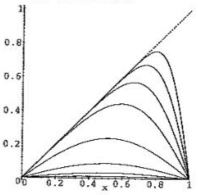
3.5 $u(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin \pi x + 2e^{-9\pi^2 t}\sin 3\pi x$
En möjlig tolkning är att u är temperaturen i en tunn stav med isolerad mantelyta. Ändpunkterna hålls vid temperaturen 0 och begynnelsetemperaturen ges av $u(x,0)$.

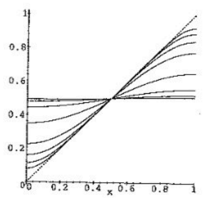
3.6 $u(x,t) = 0.3\cos t \sin x$
Här kan u vara utböjningen hos en fullkomligt böjlig sträng med längden π och fast inspända ändpunkter. Strängen påverkas ej av några yttre krafter. Vid begynnelsetiden är strängen i vila ($u_t = 0$) och har utböjningen $u(x,0)$. Eftersom i detta fall $u(x,0) \doteq 0.3\sin x$ är en 'egenfunktion' så är lösningen $u(x,t)$ en stående våg.

3.8 a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k\pi}e^{-k^2\pi^2 t}\sin k\pi x$

b) $\displaystyle\frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}e^{-(2n+1)^2\pi^2 t}\cos(2n+1)\pi x$

För tolkning av a) jämför svaret till 3.5. I b) är även stavens ändpunkter isolerade. Figurerna nedan visar u som funktion av x för några olika värden på t, a) till vänster och b) till höger. Begynnelsevärdet är streckat.

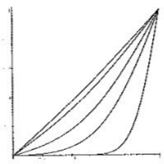




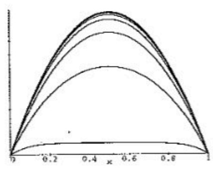
3.13 $\displaystyle u(x,t) = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n\pi}e^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x$

$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = u_{\text{st}}(x) = x.$

$u_{\text{st}}(x)$ är alltså det jämviktstillstånd som approximativt uppnås efter lång tid. Figuren visar $u(x,t)$ som funktion av x för några olika tidpunkter.



3.15
$$u(x,t) = \frac{1}{2}x(1-x) - \frac{4}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-(2k+1)^2\pi^2 t}\sin(2k+1)\pi x =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^k)}{k^3\pi^3}(1-e^{-k^2\pi^2 t})\sin(k\pi x)\ .$$
$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = u_{\text{st}}(x) = \frac{1}{2}x(1-x) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^k)}{k^3\pi^3}\sin(k\pi x)\ .$$



3.16
$$u(x,t) = -\frac{1}{6}(x^3 - x) + \frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\cos n\pi t \sin n\pi x =$$
$$= \frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}(\cos n\pi t - 1)\sin n\pi x$$

3.17 $\displaystyle u(x,t) = -x^2 + \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}e^{-k^2\pi^2 t}\cos k\pi x$

Problemet är modell för värmeledning i en tunn tråd där 2:an i högerledet i differentialekvationen representerar en konstant värmeproduktion i tråden (jämför övning 3.22). Ändpunkten $x = 0$ är perfekt isolerad. Från ändpunkten $x = 1$ leds en konstant värmeström bort ($j(1,t) = -\lambda u_x(1,t) = 2\lambda$).