Tentamensträning PDE, Överbetygsnivå, MVE500. HT-2016

Notera: svängningsproblem = vågekvation

***3.9** Lös svängningsproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\ , & 0 < x < \pi\ ,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0\ , & t > 0 \\ u(x,0) = \cos^3 x\ , & 0 < x < \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \cos x\ , & 0 < x < \pi\ . \end{cases}$$

3.12 Lös svängningsproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\ , & 0 < x < 1\ ,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0\ , & t > 0 \\ u(x,0) = 1\ , & 0 < x < 1 \\ u_t(x,0) = 0\ , & 0 < x < 1\ . \end{cases}$$

***3.14** Lös värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-t}\sin \pi x\ , & 0 < x < 1\ ,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0\ , & t > 0 \\ u(x,0) = 0\ , & 0 < x < 1\ . \end{cases}$$

3.18 Formulera ett problem med homogena randvillkor som kan utnyttjas för att lösa värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\ , & 0 < x < 1\ ,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0\ ,\ u(1,t) = e^{-t}\ , & t > 0 \\ u(x,0) = 0\ , & 0 < x < 1\ . \end{cases}$$

Ange en metod att lösa problemet.

***3.21** Ena änden ($x = 0$) av en tunn isolerad stav av längd L upphettas till temperaturen T_1, medan den andra ($x = L$) hålls vid temperaturen T_0. Situationen antas ha varat så länge att temperaturjämvikt inträtt. Vid tiden $t = 0$ avbryts upphettningen, varefter även änden $x = 0$ ges temperaturen T_0. Beräkna avkylningsförloppet.

***3.22** En isolerad tråd med längden L har vid tiden $t = 0$ temperaturen 0. Vid denna tidpunkt ansluts den till en strömkälla, varefter värmemängden q per längd- och tidsenhet kommer att utvecklas. Ändpunkterna hålls hela tiden vid temperaturen 0. Bestäm temperaturförloppet i tråden.