Tentamensträning PDE, Överbetygsnivå lösningar, MVE500. HT-2016

Notera: svängningsproblem = vågekvation

3.9 $u(x,t) = (\frac{3}{4}\cos t + \sin t)\cos x + \frac{1}{4}\cos 3t \cos 3x$
Samma tolkning som i 3.6 med det undantaget att här är strängens ändar fria, jämför övning 1.14. Begynnelsehastigheten ges av $u_t(x,0)$.

3.12 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} e^{-t}(\cos \omega_k t + \frac{1}{\omega_k}\sin \omega_k t)\frac{4}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)\pi x$
där $\omega_k = \sqrt{(2k+1)^2\pi^2 - 1}$
En tolkning av termen $2u_t$ är att svängningen äger rum i ett medium, som orsakar en dämpning som är proportionell mot hastigheten u_t.

3.14 $u(x,t) = \dfrac{1}{\pi^2 - 1}\left(e^{-t} - e^{-\pi^2 t}\right)\sin \pi x$
För tolkning, jämför svaret till 3.5. Termen i högerledet innebär att man har en tids- och rumsberoende värmeproduktion i staven.

3.18 Sätt $\tilde{u}(x,t) = xe^{-t}$, $v = u - \tilde{u}$. Då gäller

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = xe^{-t} \\ v(0,t) = v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = -x \end{cases}$$

Detta problem kan lösas genom att ansätta $v(x,t)$ som en sinusserie i x. Högerledet och begynnelsevärdet utvecklas i sinusserie.

3.21 $u(x,t) = T_0 + \dfrac{2(T_1 - T_0)}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-an^2\pi^2 t/L^2}\sin(n\pi x/L)$

3.22 $$u(x,t) = \frac{2qL^2}{A\lambda\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^3}\left(1 - e^{-ak^2\pi^2 t/L^2}\right)\sin\frac{k\pi x}{L} =$$
$$= \frac{q}{A\lambda}\frac{x(L-x)}{2} - \frac{4qL^2}{A\pi^3\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-(2k+1)^2\pi^2 at/L^2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{L}$$