Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Datum: 2017-10-28 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Milo Viviani

MVE500, TKSAM-2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt krävs 25 poäng på del 1. För betyget 4 krävs 35 poäng totalt, varav minst 6 poäng på del 2. För betyget 5 krävs 45 poäng totalt, varav minst 8 poäng på del 2. Varje godkänd dugga ger 1.5 bonuspoäng till del 1. Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok.

Del 1 (godkäntnivå)

1. Avgör om följande följd (a) och serier (b) - (c) är divergenta eller konvergenta. Om konvergent, beräkna gränsvärde eller summan. (6p)

(a) $\left\{\dfrac{\cos(n)+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} \cdot 3^{2n} \cdot 7^{-2n}$

Lösning: (a) Låt $a_n = \frac{\cos(n)+1}{n}$, då $0 \leq |a_n - 0| = |\frac{\cos(n)+1}{n}| \leq \frac{2}{n} \to 0$ för $n \to 0$. Därför konvergerar följd till 0.

(b) Låt $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ och $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Då $a_n \geq b_n$, för varje $n \geq 1$, och så $\sum_n a_n \geq \sum_n b_n$. Därför är serien $\sum_n a_n$ divergent, eftersom $\sum_n b_n$ är det. (Du kan kontrollera detta med integreraltestet)

(c) Användning av egenskaperna hos de exponentiella funktionerna ger:

$$2^{2n} \cdot 3^{2n} \cdot 7^{-2n} = \left(\frac{36}{49}\right)^n.$$

Detta ger oss en konvergent geometrisk serie på grund av $\frac{36}{49} < 1$. Så vi får att summan av serien är:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} \cdot 3^{2n} \cdot 7^{-2n} = \frac{1}{1 - \frac{36}{49}} = \frac{49}{13}$$

2. (a) Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 4 till $f(x) = \cos(\sin(2x))$. (3p)

(b) Bestäm konvergensradien för Maclaurinserien till f. (2p)

Lösning: (a) Med hjälp av den kända formeln för Maclaurinserier av $\sin(x)$ och $\cos(x)$, tar vi bara termer upp till grad 4::

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$$
$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Låt $y(x) := 2x$, $z(y) := y - \frac{y^3}{6}$ och $P(z) := 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24}$. Låt oss först ersätta y i z för att få $z(y(x)) = 2x - \frac{4x^3}{3}$. Ersätt sedan z till P för att få $P(z(y(x))) = 1 - \frac{(2x - \frac{4x^3}{3})^2}{2} + \frac{(2x - \frac{4x^3}{3})^4}{24}$.

Påminner om formlerna $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ vi får:

$$\left(2x - \frac{4x^3}{3}\right)^2 = (2x)^2 - 2(2x)\frac{4x^3}{3} + \left(\frac{4x^3}{3}\right)^2$$

och

$$\left(2x - \frac{4x^3}{3}\right)^4 = (2x)^4 + Q(x)$$

där $Q(x)$ har högre grad än 4. Eftersom den sista termen i den första formeln har högre grad än 4, kommer vi inte att överväga det i Maclaurin-formeln. Slutligen får vi Maclaurin polynom av grad 4 för f:

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 1 - \frac{1}{2}\left((2x)^2 - 2(2x)\frac{4x^3}{3}\right) + \frac{1}{24}(2x)^4 \\ &= 1 - 2x^2 + \frac{10}{3}x^4 \end{aligned}$$

(b) Konvergensradie för funktioner med Maclaurinserie med konvergensradien $R = \infty$ är $R = \infty$.

3. (a) Bestäm enhetsvektorerna $\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t)$ (dvs tangent, normal och binormal) för kurvan $\mathbf{r}(t) = \langle \cos(t^2), \sin(t^2), t^2\rangle$ for $t > 0$. (3p)

(b) Hitta krökningen i $t = 0$ och längden för kurvan $\mathbf{r}(t) = \langle t, t, t\rangle$ för $t \in [0, 2\pi]$. (3p)

Lösning: (a) Använda definitionerna av $\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t)$, vi får:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -\sin(t^2), \cos(t^2), 1\rangle \\ \mathbf{N}(t) &= \langle -\cos(t^2), -\sin(t^2), 0\rangle \\ \mathbf{B}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \sin(t^2), -\cos(t^2), 1\rangle \end{aligned}$$

(b) Eftersom kurvan är en rak linje, kan vi dra slutsatsen att dess krökning $\kappa(t)$ är konstant 0. Så $\kappa(0) = 0$.
Dessutom kan dess längd beräknas som avståndet mellan $\mathbf{r}(2\pi)$ och $\mathbf{r}(0)$, dvs, $|\mathbf{r}(2\pi) - \mathbf{r}(0)| = 2\pi\sqrt{3}$.

4. (a) Hitta den linjära approximationen av $f(x, y) = x^2y + x\cos(y^2)$ i punkten (1,0). (3p)

(b) Skissa några av nivåkurvorna till $f(x, y) = |x| + |y|$ för $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$. (3p)

Lösning:

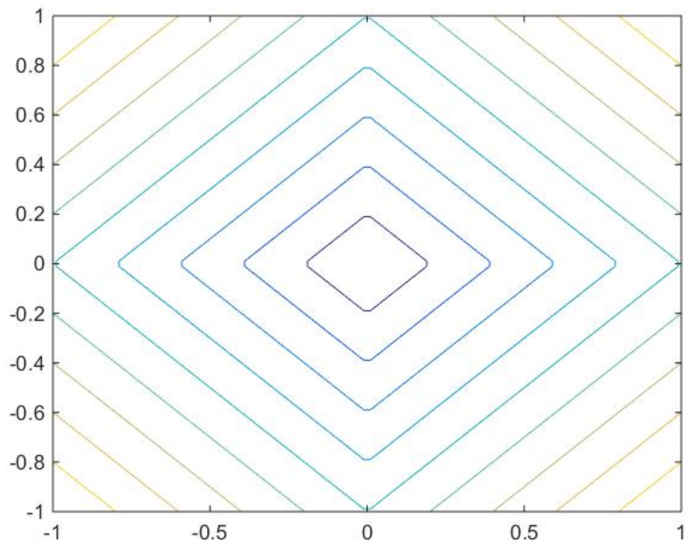
(a)Den linjära approximationen i punkten $(1, 0)$ ges av

$$L(x, y) = f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)y.$$

Vi har $f(1,0) = 1,\ f_x(1,0) = 1,\ f_y(1,0) = 1$. Då,

$$L(x,y) = 1 + (x-1) + y = x + y.$$

(b)



5. Bestäm de stationära punkterna till $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2y$. Använd andraderivatatestet för att om möjligt bestämma deras karaktär. (5p)

Lösning: Stationär punkt betyder $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$, vilket ger ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 4x^3 - 4xy = 0 \\ 4y^3 - 2x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x^2 - y) = 0 \\ 2y^3 - x^2 = 0 \end{cases}$$

Så vi får lösningarna:
$(0,0)$, $\left(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

För att klassificera dem beräknar vi Hessian matrisen:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 - 4y & -4x \\ -4x & 12y^2 \end{bmatrix}.$$

För $(x,y) = (0,0)$, får vi $H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, så vi kan inte avgöra något med andra derivatkriterier.

För $(x,y) = \left(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, vi har $H\left(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & \mp 4\sqrt[4]{\frac{1}{2}} \\ \mp 4\sqrt[4]{\frac{1}{2}} & 6 \end{bmatrix}$. Då $4\sqrt{2} > 0$ och $4\sqrt{2}\cdot 6 - \left(\mp 4\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)^2 = 16\sqrt{2} > 0$, så $\left(\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ är minimum punkter.

6. Lös vågekvationen: (6p)

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad \text{for } 0 < x < 4, t > 0 \\ u(0,t) = u(4,t) = 0 \quad \text{for } t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin(\frac{\pi}{4}x) \quad \text{for } 0 \leq x \leq 4 \\ u_t(x,0) = \cos(\frac{\pi}{4}x) \quad \text{for } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Lösning: Vågekvationen är homogen med Dirichlet-villkor. Från teori vet vi att lösningen har följande form:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{4} + b_n \sin \frac{n\pi t}{4} \right) \sin \frac{n\pi x}{4}.$$

Begynnelse vilkoren ger a_n och b_n för alla $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^4 \sin \frac{\pi}{4} x \sin \frac{n\pi x}{4} \, dx.$$

och

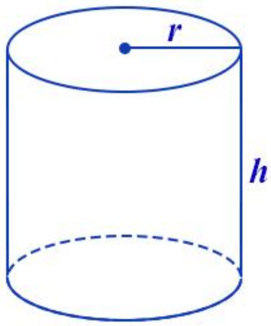
$$b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^4 \cos \frac{\pi}{4} x \sin \frac{n\pi x}{4} \, dx.$$

Integralerna ger $a_1 = 1$, $a_n = 0$ för $n \geq 2$ och $b_1 = 0$, $b_n = \frac{8}{\pi^2} \frac{(-1)^n + 1}{n^2 - 1}$ för $n \geq 2$.

Var god vänd blad!

Del 2 (överbetygsnivå)

7. Bland alla cylindrar (rät cirkulär) vars totala begränsningsyta (mantelytan och de två basytorna) har arean S, bestäm volymen V av den cylinder med maximal volym. (6p)



Lösning: Låt $x = r$ radien på cylindern och $y = h$ sin höjden. Funktionen att maximera, dvs volymen av cylindern, ges av funktionen $f(x, y) = \pi x^2 y$, medan bivillkor ges av ytan $g(x, y) = 2\pi xy + 2\pi x^2 - S = 0$, för $x > 0, y > 0$. Med hjälp av Lagrange-multiplikatorerna får vi systemet:

$$\begin{cases} 2\pi xy = \lambda(2\pi y + 4\pi x) \\ \pi x^2 = 2\pi \lambda x \\ 2\pi xy + 2\pi x^2 = S \end{cases}$$

Från den första ekvationen, får vi $\lambda = x/2$, vars substituerade i den första ger $y = 2x$. Därför erhålls den största volymen när höjden sammanfaller med diametern. Efter ersättning i den sista ekvationen (begränsningen), får vi:

$$x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}, \quad V_{\max} = 2\pi \left(\frac{S}{6\pi}\right)^{3/2}.$$

8. Avgör om följande serie är konvergent eller divergent. Om konvergent, beräkna summan. (5p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Lösning:

Låt $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ och $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ för alla $N \geq 1$. Vi har, för varje $n \geq 1$, $a_n + a_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$. Så, för alla $n \geq 1$, har vi $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+3}}$. Upprepning av denna process, får vi:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{N+1}},$$

för alla $N \geq 1$. Ta gränsvärde för $N \to \infty$, och se att serie konvergerar mot 1. [Denna typ av serie heter *telescoperande serie*].

9. Lös inhomogena värmeledningsekvationen: (5p)

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + 24x, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = -1, \quad u(1,t) = 1 \\ u(x,0) = 2x - 1 \end{cases}$$

med inhomogena Dirichlet randvillkor.

Lösning: Ekvationen är icke-homogen på grund av det icke-homogena Dirichletvillkoret. Ansätt alltså en lösning på formen $u(x,t) = v(x,t) + s(x)$. Detta ger

$$v_t = 4v_{xx} + 4s'' + 24x.$$

För att $v(x,t)$ ska uppfylla värmeledningsekvationen krävs att $s''(x) = -6x$. Dessutom ska $s(x)$ uppfylla randvillkoren $s(0) = -1$ och $s(1) = 1$. Detta ger

$$s(x) = -x^3 + 3x - 1.$$

$v(x,t)$ uppfyller därmed det homogena Dirichletproblemet. Dessutom får vi från begynnelsevillkoret att

$$\begin{cases} v_t = 4v_{xx}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ v(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = 2x - 1 - (-x^3 + 3x - 1) = x^3 - x \end{cases}$$

Variabelseparation ger nu att $v(x,t)$ är på formen

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-4n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x).$$

Begynnelsevillkoret för v ger

$$b_n = 2\int_0^1 (x^3 - x)\sin(n\pi x)dx = \frac{12(-1)^n}{(n\pi)^3}$$

Alltså,

$$v(x,t) = \frac{12}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} e^{-4n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x),$$

vilket ger

$$u(x,t) = -x^3 + 3x - 1 + \frac{12}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} e^{-4n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x)$$

Lycka till!
Milo

Formelblad MVE500, HT-2016

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \qquad \sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$$

Integraler

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 \qquad \int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a+x^2}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0 \qquad \int \sqrt{a+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a+x^2} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\right) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + \ldots \qquad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \qquad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad |x| \leq 1$$

Fourierserier

Jämn funktion $f(x) = f(-x)$
Udda funktion $f(x) = -f(-x)$

Fourierserien av en $2L$-periodisk funktion $f(x)$ ges av

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

där **Fourierkoefficienterna** ges av

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad\qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Den **komplex Fourierserien** av en $2L$-periodisk funktion $f(x)$ ges av

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

där de **komplexa Fourierkoefficienterna** ges av

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}\,dx$$

Sinusserien av $f(x)$ definierad på intervallet $x \in [0, L]$ ges av

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\,, \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Cosinusserien av $f(x)$ definierad på intervallet $x \in [0, L]$ ges av

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}\,, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Parsevals identitet för en $2L$-periodisk funktion $f(x)$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$