

## MVE500, TKSAM-2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt krävs 25 poäng på del 1. För betyget 4 krävs 35 poäng totalt, varav minst 6 poäng på del 2. För betyget 5 krävs 45 poäng totalt, varav minst 8 poäng på del 2. Varje godkänd dugga ger 1.5 bonuspoäng till del 1. Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok.

---

### Del 1 (godkäntnivå)

1. Avgör om följande följd (a) och serier (b) - (c) är divergenta eller konvergenta. Om konvergent, beräkna gränsvärde eller summan. (6p)

$$(a) \left\{ \frac{\cos(n) + 1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} \cdot 3^{2n} \cdot 7^{-2n}$$

2. (a) Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 4 till  $f(x) = \cos(\sin(2x))$ . (3p)

- (b) Bestäm konvergensradien för Maclaurinserien till  $f$ . (2p)

3. (a) Bestäm enhetsvektorerna  $\mathbf{T}(t)$ ,  $\mathbf{N}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$  (dvs tangent, normal och binormal) för kurvan  $\mathbf{r}(t) = \langle \cos(t^2), \sin(t^2), t^2 \rangle$  för  $t > 0$ . (3p)

- (b) Hitta krökningen i  $t = 0$  och längden för kurvan  $\mathbf{r}(t) = \langle t, t, t \rangle$  för  $t \in [0, 2\pi]$ . (3p)

4. (a) Hitta den linjära approximationen av  $f(x, y) = x^2y + x \cos(y^2)$  i punkten  $(1, 0)$ . (3p)

- (b) Skissa några av nivåkurvorna till  $f(x, y) = |x| + |y|$  för  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . (3p)

5. Bestäm de stationära punkterna till  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2y$ . Använd andraderivatetestet för att om möjligt bestämma deras karaktär. (5p)

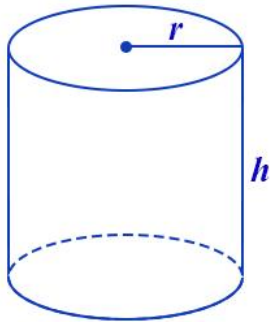
6. Lös vågekvationen: (6p)

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) & \text{for } 0 < x < 4, t > 0 \\ u(0, t) = u(4, t) = 0 & \text{for } t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) & \text{for } 0 \leq x \leq 4 \\ u_t(x, 0) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) & \text{for } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Var god vänd blad!

**Del 2 (överbetygsnivå)**

7. Bland alla cylindrar (rät cirkulär) vars totala begränsningsyta (mantelytan och de två basytorna) har arean  $S$ , bestäm volymen  $V$  av den cylinder med maximal volym. (6p)



8. Avgör om följande serie är konvergent eller divergent. Om konvergent, beräkna summan. (5p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

9. Lös inhomogena värmeledningsekvationen: (5p)

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + 24x, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = -1, \quad u(1, t) = 1 \\ u(x, 0) = 2x - 1 \end{cases}$$

med inhomogena Dirichlet randvillkor.

Lycka till!  
Milo

# Formelblad MVE500, HT-2016

## Trigonometri

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y))$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x - y) + \sin(x + y))$$

## Integraler

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a+x^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \sqrt{a-x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{a+x^2} dx = \frac{1}{2} (x \sqrt{a+x^2} + a \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|) + C$$

## Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots \quad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad |x| \leq 1$$

## Fourierserier

**Jämn funktion**  $f(x) = f(-x)$

**Udda funktion**  $f(x) = -f(-x)$

**Fourierserien** av en  $2L$ -periodisk funktion  $f(x)$  ges av

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

där **Fourierkoefficienterna** ges av

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Den **komplex Fourierserien** av en  $2L$ -periodisk funktion  $f(x)$  ges av

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

där de **komplexa Fourierkoefficienterna** ges av

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx$$

**Sinusserien** av  $f(x)$  definierad på intervallet  $x \in [0, L]$  ges av

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

**Cosinusserien** av  $f(x)$  definierad på intervallet  $x \in [0, L]$  ges av

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

**Parsevals identitet** för en  $2L$ -periodisk funktion  $f(x)$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$