MVE500, TKSAM-2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt krävs 25 poäng på del 1. För betyget 4 krävs 35 poäng totalt, varav minst 6 poäng på del 2. För betyget 5 krävs 45 poäng totalt, varav minst 8 poäng på del 2. Varje godkänd dugga ger 1.5 bonuspoäng till del 1. Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok.

Part 1 (godkäntnivå)

1. Avgör om följande serier är divergenta eller konvergenta. Om konvergent, beräkna summan. (6p)

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n)!}$, för $x \in \mathbb{R}$ [Tips: bifogat formelblad kan vara till hjälp]

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{76}{77}}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n}{6^n}$

Solution: (a) It is enough to see that it is convergent because $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n)!} = x\cos(x)$, for all $x \in \mathbb{R}$.

(b) The series is a p-series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ with $p = \frac{76}{77} \leq 1$, therefore is divergent.

(c) The series is a geometric series, therefore convergent. Moreover :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{6^n} - 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{1-\frac{5}{6}} - 1 - \frac{5}{6} = \frac{25}{6}.$$

2. (a) Bestäm Maclaurinserie till $f(x) = \arctan \frac{x^2}{2}$. (3p)

(b) Bestäm konvergensradien för Maclaurinserien till f. (2p)

Solution: (a) Using the known formula for the Maclaurin series of $\arctan x$, we can substitute x with $\frac{x^2}{2}$ to get:

$$\arctan \frac{x^2}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(\frac{x^2}{2})^{2k-1}}{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{4k-2}}{2^{2k-1}(2k-1)}.$$

(b) The radius of convergence of the Maclaurin series of $\arctan x$ is 1. Therefore in our case it has to be:

$$|\frac{x^2}{2}| \leq 1 \iff |x| \leq \sqrt{2}.$$

Therefore the radius of convergence is $R = \sqrt{2}$.

3. Betrakta kurvan $\mathbf{r}(t) = \langle t\cos(t), t\sin(t)\rangle$, för $t > 0$:

(a) Bestäm hastighetvektorn $\mathbf{v}(t)$ vid $t = 2\pi$. (2p)

(b) Skriv formeln för längden av $\mathbf{r}(t)$ för $t \in [0, 2\pi]$ i den mest förenklade formen. (du behöver inte beräkna integralen) (2p)

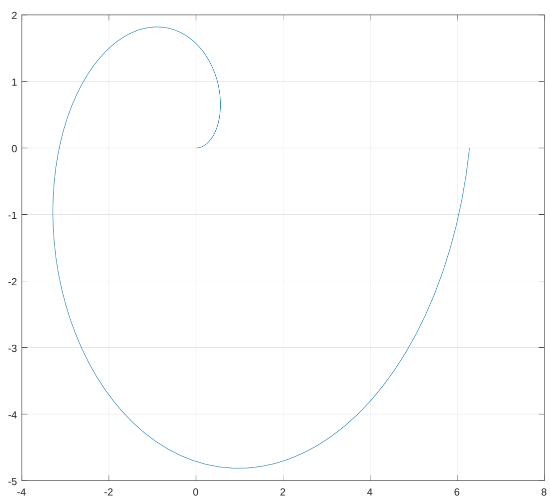
(c) Skissa kurvan för $t \in [0, 2\pi]$. (1p)

Solution: (a) We have that $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \langle \cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t \rangle$, and so $\mathbf{v}(2\pi) = \langle 1, 2\pi \rangle$.

(b) We have to calculate: $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{1 + t^2}$. Therefore we get:

$$L(0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + t^2} \mathrm{d}t$$

(c)



4. Låt $f(x, y) = |x| - |y|$, för $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) Hitta den tangentplanet av f i punkten $(x_0, y_0) = (1, 1)$. (3p)

(b) Skissa några av nivåkurvorna till f för $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$. (3p)

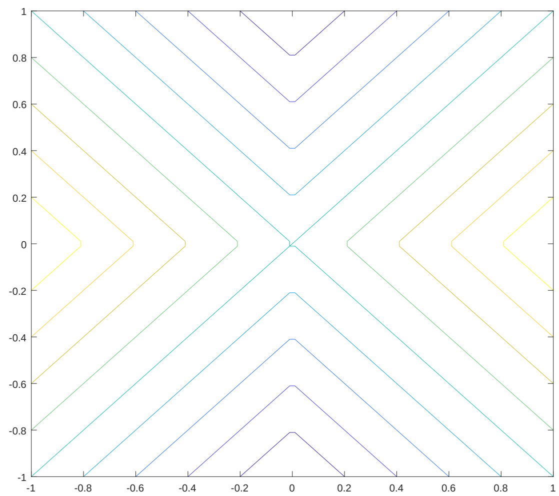
Solution:

(a)When both $x, y \geq 0$, we have that:

$$f(x, y) = x - y.$$

Hence we have that $f(x_0, y_0) = 0$. Therefore the tangent plane to the graphic of f $(x_0, y_0) = (1, 1)$ is $z = x - y$.

(b)



5. (a) Visa att $(\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, 2), (-\frac{\pi}{2}, -2)$ är stationära punkterna till $f(x, y) = \cos(xy) + \sin(x)$ och använd andraderivatatestet för bestämma deras karaktär. (4p)

(b) Hitta de andra stationära punkterna till f inuti cirkeln $x^2 + y^2 < \pi^2$ och använd andraderivatatestet för att om möjligt bestämma deras karaktär. (2p)

Solution: Stationary point means $\nabla f(x, y) = [-y\sin(xy) + \cos x, -x\sin(xy)] = \mathbf{0}$. This gives the system of equations:

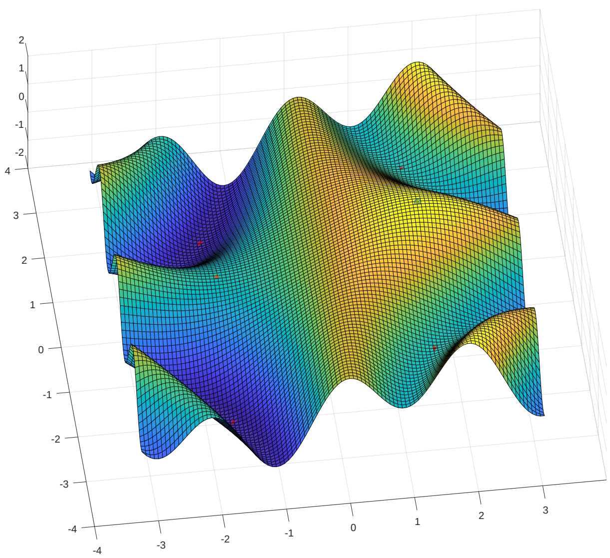
$$\begin{cases} -y\sin(xy) + \cos x = 0 \\ -x\sin(xy) = 0 \end{cases}$$

From there we get six possible solutions in $x^2 + y^2 < \pi^2$:
$(\pm\frac{\pi}{2}, 0), (\pm\frac{\pi}{2}, \pm 2), (\pm\frac{\pi}{2}, \mp 2)$.

To classify them we calculate the Hessian matrix:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} -y^2\cos(xy) - \sin x & -\sin(xy) - xy\cos(xy) \\ -\sin(xy) - xy\cos(xy) & -x^2\cos(xy) \end{bmatrix}.$$

From there we find $(\frac{\pi}{2}, 0)$ maximum, $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ saddle, $(\frac{\pi}{2}, 2)$ saddle, $(-\frac{\pi}{2}, 2)$ minimum, $(\frac{\pi}{2}, -2)$ saddle, $(-\frac{\pi}{2}, -2)$ minimum.



6. Hitta sinusserier till $f(x) = 1$ och $g(x) = x$ och sen använda dem för att lösa vågekvationen: (6p)

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = 3u_{xx}(x,t) \quad \text{for } 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \text{for } t \geq 0 \\ u(x,0) = 1 \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x,0) = x \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Solution: The sine series of f and g in $[0,1]$[1] are, respectively:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^{n+1} + 1)}{n\pi} \sin n\pi x$$

and

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n\pi} \sin n\pi x.$$

The wave equation is homogeneous with Dirichlet boundary conditions. From the theory we know that the solution has the following expression:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\pi\sqrt{3}t + b_n \sin n\pi\sqrt{3}t \right) \sin n\pi x.$$

[1] It is a perfectly fine solution if considered a general interval $[0, L]$, instead of $[0, 1]$.

From the sine-series of f and g we get:

$$a_n = \frac{2((-1)^{n+1} + 1)}{n\pi}$$

and

$$b_n = \frac{2(-1)^n}{3n^2\pi^2}.$$

Var god vänd blad!

Part 2 (överbetygsnivå)

7. Bestäm summan till följande serier, med hjälp av Parseval identitet till funktionen $f(x) = x$ för $x \in [-\pi, \pi]$: (6p)

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

Solution: (a) The Parseval identity for $f(x) = x$, with $x \in [-\pi, \pi]$, says that:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

where b_n are the Fourier coefficients of f, which are $b_n = \frac{2(-1)^{n-1}}{n}$. The integral on the LHS is equal to $\frac{2\pi^2}{3}$. Therefore we get $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(b) It is enough to notice that:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24}.$$

(c) Putting (a) and (b) together we have:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

8. I en butik säljs tre olika föremål. Deras kvantiteter anges med x_1, x_2, x_3 och deras priser med p_1, p_2 respektive p_3 . Med en fast budget $x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = C$, hitta maximivärdet för verktygsfunktionen $U(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$, för $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ och $p_1, p_2, p_3 > 0$ fast. (5p)

Solution:

Using the Lagrange multipliers we get:

$$\begin{array}{l} \partial_{x_1} U(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3 = \lambda p_1 \\ \partial_{x_2} U(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 = \lambda p_2 \\ \partial_{x_3} U(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 = \lambda p_3 \\ x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 - C = 0 \end{array}.$$

We get then $x_1x_2x_3 = \lambda p_1x_1 = \lambda p_2x_2 = \lambda p_3x_3$. We can exclude $\lambda = 0$ (otherwise all the quantities would be 0) and taking $\lambda \neq 0$, which gives $p_1x_1 = p_2x_2 = p_3x_3 = C/3$. Therefore the maximum of the utility is $U(x_1, x_2, x_3) = \frac{C^3}{27p_1p_2p_3}$.

9. Lös med hjälp av variabelseparation den modifierad homogen värmekvation: (5p)

$$\begin{cases} u_t + u = 4u_{xx}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = x. \end{cases}$$

Solution: The separation of variables gives us the ansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$. Substituting this expression in the heat equation we get:

$$\begin{cases} T'(t) = (4k-1)T(t) & t > 0 \\ X''(x) + kX(x) = 0 & 0 < x < 1 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

The homogeneous conditions give us as possible solutions $X_n(x) = b_n \sin(n\pi x)$ and $T_n(t) = \exp((-4(n\pi)^2 + 1)t)$, for $n = 1, 2, 3....$
Therefore the general formula for the solution is:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp((-4(n\pi)^2 + 1)t) \sin n\pi x.$$

Finally we have to calculate the coefficients b_n.

$$b_n = 2\int_0^1 x \sin n\pi x \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi n}(-1)^{n+1}.$$

Lycka till!
Milo

Formelblad MVE500, HT-2016

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \qquad \sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$$

Integraler

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 \qquad \int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a+x^2}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0 \qquad \int \sqrt{a+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a+x^2} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\right) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + \dots \qquad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad |x| \leq 1$$

Fourierserier

Jämn funktion $f(x) = f(-x)$
Udda funktion $f(x) = -f(-x)$

Fourierserien av en $2L$-periodisk funktion $f(x)$ ges av

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

där **Fourierkoefficienterna** ges av

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Den **komplex Fourierserien** av en $2L$-periodisk funktion $f(x)$ ges av

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

där de **komplexa Fourierkoefficienterna** ges av

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}\,dx$$

Sinusserien av $f(x)$ definierad på intervallet $x \in [0, L]$ ges av

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\,, \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Cosinusserien av $f(x)$ definierad på intervallet $x \in [0, L]$ ges av

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}\,, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Parsevals identitet för en $2L$-periodisk funktion $f(x)$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$