Chalmers tekniska högskola | Datum: 2017-12-19 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Milo Viviani

MVE500, TKSAM-2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt krävs 25 poäng på del 1. För betyget 4 krävs 35 poäng totalt, varav minst 6 poäng på del 2. För betyget 5 krävs 45 poäng totalt, varav minst 8 poäng på del 2. Varje godkänd dugga ger 1.5 bonuspoäng till del 1. Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok.

Part 1 (godkäntnivå)

1. Avgör om följande serier är divergenta eller konvergenta. Om konvergent, beräkna summan. (6p)

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n)!}$, för $x \in \mathbb{R}$ [Tips: bifogat formelblad kan vara till hjälp]

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{76}{77}}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n}{6^n}$

2. (a) Bestäm Maclaurinserie till $f(x) = \arctan \frac{x^2}{2}$. (3p)

(b) Bestäm konvergensradien för Maclaurinserien till f. (2p)

3. Betrakta kurvan $\mathbf{r}(t) = \langle t\cos(t), t\sin(t)\rangle$, för $t > 0$:

(a) Bestäm hastighetvektorn $\mathbf{v}(t)$ vid $t = 2\pi$. (2p)

(b) Skriv formeln för längden av $\mathbf{r}(t)$ för $t \in [0, 2\pi]$ i den mest förenklade formen. (du behöver inte beräkna integralen) (2p)

(c) Skissa kurvan för $t \in [0, 2\pi]$. (1p)

4. Låt $f(x, y) = |x| - |y|$, för $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) Hitta den tangentplanet av f i punkten $(x_0, y_0) = (1, 1)$. (3p)

(b) Skissa några av nivåkurvorna till f för $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$. (3p)

5. (a) Visa att $(\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, 2), (-\frac{\pi}{2}, -2)$ är stationära punkterna till $f(x, y) = \cos(xy) + \sin(x)$ och använd andraderivatatestet för bestämma deras karaktär. (4p)

(b) Hitta de andra stationära punkterna till f inuti cirkeln $x^2 + y^2 < \pi^2$ och använd andraderivatatestet för att om möjligt bestämma deras karaktär. (2p)

6. Hitta sinusserier till $f(x) = 1$ och $g(x) = x$ och sen använda dem för att lösa vågekvationen: (6p)

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = 3u_{xx}(x,t) & \text{for } 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{for } t \ge 0 \\ u(x,0) = 1 & \text{for } 0 \le x \le 1 \\ u_t(x,0) = x & \text{for } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Var god vänd blad!

Part 2 (överbetygsnivå)

7. Bestäm summan till följande serier, med hjälp av Parseval identitet till funktionen $f(x) = x$ för $x \in [-\pi, \pi]$: (6p)

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

8. I en butik säljs tre olika föremål. Deras kvantiteter anges med x_1, x_2, x_3 och deras priser med p_1, p_2 respektive p_3 . Med en fast budget $x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = C$, hitta maximivärdet för verktygsfunktionen $U(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$, för $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ och $p_1, p_2, p_3 > 0$ fast. (5p)

9. Lös med hjälp av variabelseparation den modifierad homogen värmekvation: (5p)

$$\begin{cases} u_t + u = 4u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = x. \end{cases}$$

Lycka till!
Milo

Formelblad MVE500, HT-2016

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \qquad \sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$$

Integraler

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 \qquad \int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a+x^2}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0 \qquad \int \sqrt{a+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a+x^2} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\right) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + \dots \qquad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad |x| \leq 1$$

Fourierserier

Jämn funktion $f(x) = f(-x)$
Udda funktion $f(x) = -f(-x)$

Fourierserien av en $2L$-periodisk funktion $f(x)$ ges av

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

där **Fourierkoefficienterna** ges av

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Den **komplex Fourierserien** av en $2L$-periodisk funktion $f(x)$ ges av

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

där de **komplexa Fourierkoefficienterna** ges av

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}\,dx$$

Sinusserien av $f(x)$ definierad på intervallet $x \in [0, L]$ ges av

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\,, \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Cosinusserien av $f(x)$ definierad på intervallet $x \in [0, L]$ ges av

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}\,, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Parsevals identitet för en $2L$-periodisk funktion $f(x)$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$