Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Datum: 2018-08-20 kl. 14.00 - 18.00
Telefonvakt: Olof Giselsson

MVE500, TKSAM-2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt krävs 25 poäng på del 1. För betyget 4 krävs 35 poäng totalt, varav minst 6 poäng på del 2. För betyget 5 krävs 45 poäng totalt, varav minst 8 poäng på del 2. Varje godkänd dugga ger 1.5 bonuspoäng till del 1. Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok.

Part 1 (godkäntnivå)

1. Avgör rigoröst om följande föjld (a)-(b) och serie (c) är divergenta eller konvergenta. (6p)

(a) $\left\{\dfrac{5n^3+2n^2+1}{n^3-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (b) $\left\{\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\cdot\cos(n)}{n\cdot 3^n}$

2. (a) Bestäm koefficienter av Maclaurinserie till $f(x)=(a+bx)^n$, för $a,b>0$ och $n = 1,2,\ldots$. (3p)
(b) Bestäm konvergensradien för Maclaurinserien till f. (2p)

3. (a) Hitta längden för kurvan $\mathbf{r}(t)=\langle\frac{t^3}{3},t^2,2t\rangle$, för $t\in[0,1]$. (3p)
(b) Hitta krökningen i $t=1$ för samma kurvan. (3p)

4. (a) Hitta den linjära approximationen av $f(x,y)=\exp\left(\dfrac{x^2}{y-1}\right)$ i punkten (1,-1). (3p)
(b) Skissa några av nivåkurvorna till $f(x,y)=4x^2+9y^2$, för $-1\le f(x,y)\le 1$. (3p)

5. Bestäm de stationära punkterna till $f(x,y)=\arctan\big((x^2-1)y\big)$. Använd andraderivatatestet för att om möjligt bestämma deras karaktär. (5p)

6. Lös värmeledningsekvationen: (6p)

$$\begin{cases} u_t(x,t)=3u_{xx}(x,t) & \text{for } 0<x<1, t>0 \\ u(0,t)=u(1,t)=0 & \text{for } t\ge 0 \\ u(x,0)=x(1-x)+\sin(\pi x) & \text{for } 0\le x\le 1 \end{cases}$$

Var god vänd blad!

Part 2 (överbetygsnivå)

7. Låt $F = 10 - x^2 - y^2 - z^2$ och för varje reella tal a låt $G_a = 3x + y + z - a$. För fast a, maximera F med förbehåll för villkor $G_a = 0$. (6p)

Detta maximala värde varierar med a, kalla det V_a. Också, låt λ_a vara Lagrange multiplikatorn för givet a. Visa med uttryckliga beräkningar att $\frac{\partial V_a}{\partial a} = \lambda_a$.

8. Bestäm på två olika sätt Maclaurinpolynomet av ordning 6 till $f(x) = \sin(x)\cos(x)$. (5p)

9. Lös inhomogena vågekvationen:: (5p)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 1, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 1 \\ u(x,0) = x \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

med inhomogena Dirichlet randvillkor.

Lycka till!
Milo

Formelblad MVE500, HT-2016

Trigonometri

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \qquad \sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$$

Integraler

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0 \qquad \int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a-x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a+x^2}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C, \quad a \neq 0 \qquad \int \sqrt{a+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a+x^2} + a\ln|x + \sqrt{x^2+a}|\right) + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + \dots \qquad |x| < 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad |x| \leq 1$$

Fourierserier

Jämn funktion $f(x) = f(-x)$
Udda funktion $f(x) = -f(-x)$

Fourierserien av en $2L$-periodisk funktion $f(x)$ ges av

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

där **Fourierkoefficienterna** ges av

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad\qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Den **komplex Fourierserien** av en $2L$-periodisk funktion $f(x)$ ges av

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

där de **komplexa Fourierkoefficienterna** ges av

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}\,dx$$

Sinusserien av $f(x)$ definierad på intervallet $x \in [0, L]$ ges av

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\ , \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Cosinusserien av $f(x)$ definierad på intervallet $x \in [0, L]$ ges av

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}\ , \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Parsevals identitet för en $2L$-periodisk funktion $f(x)$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$