MVE520 Vecko-PM läsvecka 2

Innehåll. Linjens ekvation och planets ekvation.

Avsnitt i kursboken, Stewart. Kap. 12.5

Lärmål.

För att bli godkänd på kursen ska du kunna nedanstående innehåll.

- Härleda ekvationen för räta linjen i rummet på vektorform, parameterform och parameterfri form.
- Bestämma skärningspunkten (om det finns någon) mellan två linjer i rummet.
- Härleda en ekvation för planet på formen $ax+by+cz=d$.(Rita figur!)
- Bestämma en ekvation för planet då man får givet tre punkter som ligger i planet
- Bestämma skärningslinjen mella två givna plan.
- Beräkna vinkeln mellan två plan.
- Beräkna vinkeln mellan en linje och ett plan.
- Avgöra i vilken punkt en linje skär ett plan.
- Bestämma projektionen av en punkt Q på linjen L.
- Bestämma projektionen av en given punkt Q på planet Π.

För överbetyg ska du också kunna...

- Lösa mer komplicerade problem där triangelns area/parallellepipedens volym ingår på något sätt.
- Beräkna avståndet mellan en linje och ett plan.
- Beräkna avståndet från en punkt till ett plan.
- Beräkna avståndet mellan två plan.
- Beräkna avståndet mellan två linjer
- Lösa mer komplicerade problem där linjen/planets ekvation ingår på något sätt.

Rekommenderade övningsuppgifter.

G: 12.5: 3,5,7,11,13,15,17,19,21,23,25,27,31,33,39,45,47,51,53,55,57,67

Ex 1. För ett plan Π med normalvektor $\boldsymbol{n}$ och en linje L som är parallell med vektorn $\boldsymbol{v}$, är vinkeln mellan Π och L definerad som

$$\theta = \measuredangle(\boldsymbol{v}, \mathrm{proj}_{\Pi}\boldsymbol{v}),$$

var

$$\mathrm{proj}_{\Pi}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \mathrm{proj}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}. \tag{1}$$

Visa att

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{v}|}\right).$$

Hint: Börja med att visa

$$|\boldsymbol{v}|\sin\theta = |\mathrm{comp}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}|.$$

Ex 2. (a) Bestäm vinkeln mellan planet

$$\Pi : x - 2y + 3z = 2 \tag{2}$$

och linjen

$$L : \frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{2} = z - 1. \tag{3}$$

(b) Bestam skärningspunkten mellan L och Π.

Ex 3. Introduktion: Om L är linjen som är parallell med $\boldsymbol{v}$ och innehåller punkten P, så är projektionen av punkten $Q \in \mathbb{R}^3$ på L definerad som punkten $R \in L$ sa att

$$\overrightarrow{PR} = \mathrm{proj}_{\boldsymbol{v}}\overrightarrow{PQ}.$$

Uppgift: (a) Bestäm projektionen av punkten $Q = (4, 4, 5)$ på linjen

$$L : \quad x - 2 = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{2}.$$

Hint: Börja med att hitta en punkt $P \in L$ och en vektor $\boldsymbol{v}$ som beskriver L.

(b) Beräkna avståndet från punkten Q till linjen L.

Ex 4. Introduktion: Om Π är planet med normalvektor $\boldsymbol{n} \in V_3$ som innehåller punkten P, så ar projektionen av punkten Q på Π definerad som punkten $R \in \Pi$ så att

$$\overrightarrow{PR} = \operatorname{proj}_{\Pi}\overrightarrow{PQ},$$

var $\operatorname{proj}_{\Pi}\overrightarrow{PQ}$ är definerad i ekvation (1).

Uppgift:Planet $\Pi: \ x + y - z = 4$ och punkten $Q = (1, 4, -2)$ är givna:

(a) Bestäm projektionen av punkten Q på Π.
Hint: Börja med att hitta en punkt $P \in \Pi$ och en normalvektor $\boldsymbol{n}$ som beskriver Π.

(b) Beräkna avståndet från punkten Q till Π.

ÖB: 12.5: 1,35,37,61,65,69,71,73,77

Svar:

Ex 2. (a) $\theta = \sin^{-1}(1/7)$. (b) Sedan ekvationen för linjen (3) ger att $x = 6z-8$ och $y = 4z-2$, kan vi ersätta x och y i ekvationen för planet (2) med respektive högersidor. Det ger lösningen $z = 6$, och därmed $x = 6z - 8 = 28$ och $y = 4z - 2 = 22$. Skärningspunkten är $P = (28, 22, 6)$.

Ex 3. (a)

$$R = \left(\frac{8}{3}, \frac{13}{3}, \frac{16}{3}\right).$$

(b)

$$D = |\overrightarrow{RQ}| = \left|\left\langle \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\rangle\right| = \frac{\sqrt{18}}{3}.$$

Ex 4. (a) Planets ekvation ger normalvektorn $\boldsymbol{n} = \langle 1, 1, -1\rangle$ och (vid att sätta $x = z = 0$) att $P = (0, 4, 0)$ är en punkt i planet. Vi får $\overrightarrow{PQ} = \langle 1, 0, -2\rangle$ och

$$\operatorname{proj}_{\Pi}\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} - \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|^2}\boldsymbol{n} = \overrightarrow{PQ} - \frac{3}{3}\boldsymbol{n} = \langle 0, -1, -3\rangle.$$

Det återstar att hitta punkten $R = (r_1, r_2, r_3)$ så att

$$\overrightarrow{PR} = \langle 0, -1, -3\rangle.$$

Sedan
$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} = \langle 0, 3, -3 \rangle$$
konkluderar vi att $R = (0, 3, -3)$.

(b)
$$D = |\overrightarrow{RQ}| = |\langle 1, 1, -1 \rangle| = \sqrt{3}.$$