MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola Datum: 2018-03-15 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen Telefonvakt: Adam Malik
ankn 5325

MVE520 Linjär algebra

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2018 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (15p)

2. (a) För vilka värden av parametern $c \in \mathbb{R}$ är ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ med (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & c \\ -4 & -4 & 1-2c \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} c \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

lösbart (dvs konsistent)?

(b) Beskriv lösningsmängden när $c = 1$. (2p)

Lösning:

(a): Vid elementära radoperationer kan totalmatrisen transformeras till följande trappstegsmatris:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & c & c \\ -4 & -4 & 1-2c & -1 \\ 4 & 8 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & c & c \\ 0 & 4 & 1 & -1+2c \\ 0 & 0 & 1-c & 1-c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & c-1 & 1-c \\ 0 & 4 & 1 & -1+2c \\ 0 & 0 & 1-c & 1-c \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-c \\ 0 & 1 & 1/4 & (-1+2c)/4 \\ 0 & 0 & 1-c & 1-c \end{array}\right]$$

Vi måste betrakta två fall: $c \neq 1$ och $c = 1$.
I första fallet får vi (sedan $1 - c \neq 0$)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-c \\ 0 & 1 & 1/4 & (-1+2c)/4 \\ 0 & 0 & 1-c & 1-c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-c \\ 0 & 1 & 0 & (-1+c)/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

I fallet $c = 1$ får vi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-c \\ 0 & 1 & 1/4 & (-1+2c)/4 \\ 0 & 0 & 1-c & 1-c \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{1}$$

Konklusion: Ekvationssystemet är konsistent för alla $c \in \mathbb{R}$.

(b) Ekvation (1) ger lösningsmängden

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1/4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad x_3 \in \mathbb{R}.$$

3. Låt L_1 vara linjen som går genom punkten

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{och är parallell med vektorn} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

och låt

$$L_2 : \quad x = 2t, \quad y = 5 - t, \quad z = 3, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Ange L_1 på parameterform. (2p)

(b) Ange skärningspunkten till linjerna L_1 och L_2 om de skär varandra, och ange minsta avstånd mellan linjerna om de inte skär varandra. (2p)

Lösning:

(a):

$$L_1 : \quad x = 3 + s, \quad y = 1 + 2s, \quad z = 4 - s, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

(b): Ett korsningspunkt finns omm det finns $s, t \in \mathbb{R}$ så att

$$3 + s = 2t, \quad 1 + 2s = 5 - t, \quad 4 - s = 3,$$

vilket motsvarar ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Eliminationsmetoden ger

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Linjerna korsar vid punkten

$$L_1(s = 1) = L_2(t = 2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

4. Beräkna inversen till följande matriser (4p)

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 11 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 1 & -11 \\ -1 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -11 \\ -1 & 12 \end{bmatrix},$$

och inversen till B bestäms vid att lösa $BX = I_3$ med eliminationsmetoden:

$$[B|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -7 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 15 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -7 & 1 \end{array}\right].$$

5. Beräkna determinanten till matrisen (3p)

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 & -0.5 \\ 0 & 8 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

(b) Tillämpa Cramers regel för att bestämma x_3 i ekvationssystemet (2p)

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lösning: (a) Om matrisen B erhålls vid att addera $-0.5\mathrm{Rad}_3(A)$ till $\mathrm{Rad}_4(A)$, dvs

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 & -0.5 \\ 0 & 8 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

så håller följande: $\det(B) = \det(A)$. Sedan B är triangulärmatris får vi

$$\det(A) = \det(B) = B_{11}B_{22}B_{33}B_{44} = 3 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 1 = 48.$$

(b) Sedan matrisen $[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}_4]$ är triangulär får vi

$$x_3 = \frac{\det([\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}_4])}{\det(A)} = \frac{\det \begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 & -0.5 \\ 0 & 8 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}{\det(A)} = \frac{72}{48} = \frac{3}{2}.$$

6. (a) Ange normalekvationen till ekvationssystemet $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}$. (1p)

(b) Tillämpa minsta kvadratmetoden för att anpassa räta linjen $p(t) = c_1 + c_2 t$ till följande mätserie (4p)

$$\begin{array}{c|cccc} t & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & -3 & -2 & 1 & 4 \end{array},$$

och beräkna minsta kvadratfelet (dvs residualen).

Lösning:

(a) Normalekvationen:

$$A^T A\boldsymbol{c} = A^T\boldsymbol{y}.$$

(b) Mätserien ger följande överbestämta ekvationssystem för anpassning av rät linje:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{=\boldsymbol{c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{y}}.$$

Sedan

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A^T\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix},$$

bestäms $\boldsymbol{c}$ vid att lösa normalekvationen

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix} \implies \boldsymbol{c} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

och $p(t) = \frac{-6}{5} + \frac{12}{5} t$.
Residualen:

$$|\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{c}| = \left| \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -18 \\ -6 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{5} \left| \begin{bmatrix} -15+18 \\ -10+6 \\ 5-6 \\ 20-18 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{5} \left| \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right| = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

7. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om A och B är inverterbara $n \times n$ matriser så är matrisen AB inverterbar. (1p)

(b) För varje $n \times n$ matris A med $n > 1$ och varje $\alpha \in \mathbb{R}$ så är $\det(\alpha A) = \alpha \det(A)$. (1p)

(c) Avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definerad som $T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_2 x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$ är linjär. (1p)

(d) Om $A^T A$ är inverterbar så är A inverterbar. (1p)

Lösning:

(a) Sann. Matriserna A och B är inverterbara omm $\det(A)\det(B) \neq 0$. Därmed är $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$ vilket implicerar att AB är inverterbar.

(b) Ej sann. Motexempel: Låt $A = I_n$ och $\alpha = 2$. Sedan $2I_n$ är en triangulärmatris följer det att

$$\det(2I_n) = 2^n = 2^n \det(I_n) \neq 2\det(I_n).$$

(c) Ej sann. Observera att

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) + T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

medan

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Det implicerar att

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) \neq T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) + T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}).$$

(d) Ej sann. Motexempel: Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

är inte kvadratrisk och därmed inte inverterbar, men

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

är givetvis inverterbar.

8. Tillämpa minsta kvadratmetoden för att anpassa andragradspolynomet $p(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2$ till mätserien som är given i Uppgift 6.(b) och beräkna minsta kvadratfelet (dvs residualen). (4p)

Lösning:

Mätserien ger följande överbestämta ekvationssystem för anpassning av andragradspolynomet $p(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^3$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}}_{=\boldsymbol{c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{y}}.$$

Sedan

$$A^TA = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A^T\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix},$$

bestäms $\boldsymbol{c}$ vid att lösa normalekvationen

$$A^TA\boldsymbol{c} = A^T\boldsymbol{y}$$

med eliminationsmetoden:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 12 \\ 6 & 8 & 18 & 14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 0 \\ 6 & 8 & 18 & 14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -10 & -10 & -24 \\ 0 & -10 & -6 & -22 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -10 & -10 & -24 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -10 & & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1.7 \\ 0 & 1 & 0 & 1.9 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{array}\right].$$

Lösningen är $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -1.7 \\ 1.9 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ och $p(t) = -1.7 + 1.9t + 0.5t^3$. Residualen:

$$|\boldsymbol{y} - A\boldsymbol{c}| = \left| \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1.7 - 1.9 + 0.5 \\ -1.7 \\ -1.7 + 1.9 + 0.5 \\ -1.7 + 3.8 + 2 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.3 \\ 0.3 \\ -0.1 \end{bmatrix} \right| = \sqrt{\frac{2}{10}}.$$

9. Låt S vara parallellepipeden som spänns upp av vektorerna

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

och låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbilningen $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ med

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}.$$

Beräkna volymen till

a) parallellepipeden S (2p)

b) bilden $T(S)$. (2p)

Lösning:

(a) Låt $B = [\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3]$. Sedan B är triangulärmatris är

$$\text{Volym}(S) = |\det(B)| = 8.$$

(b)

$$\text{Volym}(T(S)) = |\det(A)||\det(B)| = 56 \cdot 8 = 448.$$

Lycka till!
Håkon Hoel

Anonym kod	MVE520 Linjär algebra 2018-03-15	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Ange vilka av följande vektorer som är parallella och vilka som är ortogonala (och motivera varför angivna vektorer är ortogonala/parallella): (3p)

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}.$$

Lösning:

Två vektorer $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ är ortogonala omm $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$, och parallella omm $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}|/(|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|) = 1$.

Vi ser att $\boldsymbol{c} = -3\boldsymbol{a}$, så $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{c}$ är parallella. Vidare vet vi att $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ ortogonal mot båda $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$, och sedan $\boldsymbol{c}$ och $\boldsymbol{a}$ är parallella följer det att också $\boldsymbol{c}$ och $\boldsymbol{d}$ är ortogonala.

Svar: ....

(b) Låt A vara en $m \times n$ matris med $n > m \geq 1$, låt $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ och låt $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ vara kolonnvektorer. Ange om följande räkneoperationer är väldefinerade eller ej: (Ingen motivation behövs för svaren. Varje fråga ger ger 0.5 poäng för rätt svar och 0 poäng för fel eller inget svar.) (4p)

(i) $\alpha + \boldsymbol{u}$

(ii) $(\alpha \boldsymbol{u}) \cdot (\beta \boldsymbol{v})$

(iii) $A\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$

(iv) AA

(v) $(A\boldsymbol{u}) \cdot (A\boldsymbol{v})$

(vi) $\alpha |\boldsymbol{u}| A$

(vii) $\boldsymbol{v}^T (A^T A + I_n)\boldsymbol{u}$

(viii) $AA^T + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$

Lösning:

(Tar här med motivation även om det inte behövdes på tentan).

(i) Summan av skalär och vektor är ej väldefinerad.

(ii) Skalärprodukten av två vektorer i $\mathbb{R}^n$ är väldefinerad.

(iii) Summan av en vektor i $\mathbb{R}^m$ och en vektor i $\mathbb{R}^n$ när $n > m$ är ej väldefinerad.

(iv) Matrisprodukten är ej väldefinerad sedan antalet kolonner inte är lika med antalet rader i A.

(v) Skalärprodukten av två vektorer i $\mathbb{R}^m$ är väldefinerad.

(vi) Skalärmultiplikation av matris är väldefinerad.

(vii) Väldefinerad: $(A^T A + I_n)$ är en $n \times n$ matris, så $\boldsymbol{v}^T (A^T A + I_n)\boldsymbol{u}$ motsvarar skalärprodukten mellan vektorerna $\boldsymbol{v}$ och $(A^T A + I_n)\boldsymbol{u}$, båda i $\mathbb{R}^n$.

(viii) Ej väldefinerad: AA^T är en $m \times m$ matris, medan $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$ är en $n \times n$ matris.

Svar: ....

VÄND!

(c) Finn alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} 5x & + & 9y & + & 5z & = & 1 \\ 2x & + & 4y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & + & 5y & + & 2z & = & -1 \end{cases}$. (3p)

Lösning:

Tillämping av eliminationsmetoden ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 9 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 9 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right],$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

och vi får den unika lösningen

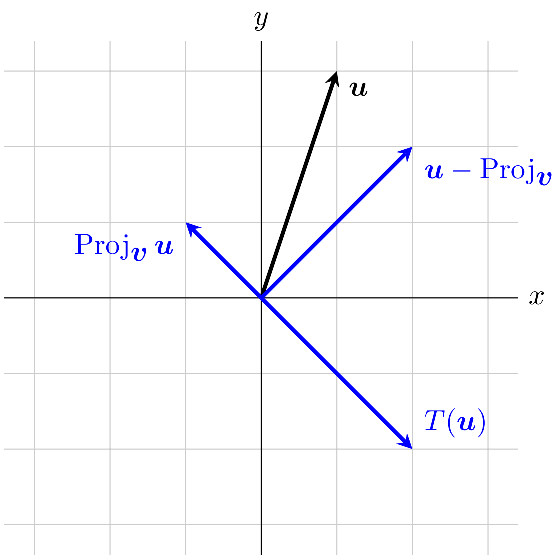
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Svar: ....

(d) I figuren nedanför är vektorern $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ritad.

(i) Given $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, bestäm $\mathrm{Proj}_{\boldsymbol{v}}\, \boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{u} - \mathrm{Proj}_{\boldsymbol{v}}\, \boldsymbol{u}$ och rita de två vektorerna i figuren. (3p)

(ii) Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildningen $T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} (x_1 + x_2)/2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$. Bestäm standardmatrisen till T och rita $T(\boldsymbol{u})$ i figuren. (2p)



Lösning:

(i):

$$\mathrm{Proj}_{\boldsymbol{v}}\, \boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{v}|^2}\boldsymbol{v} = \frac{2}{2}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{u} - \mathrm{Proj}_{\boldsymbol{v}}\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(ii): Standardmatrisen ges vid

$$A = [T(\boldsymbol{e}_1) T(\boldsymbol{e}_2)] = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad T(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(Vektorerna som man bes rita är givna i blått i figuren.)

Svar: ....