**MATEMATIK** | **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2018-08-29 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Sebastian Jobjörnsson ankn 6457
Examinator: Håkon Hoel

# MVE520 Linjär algebra
LMA515 Matematik, del C

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2018 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

## Del 1: Godkäntdelen

**1.** Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. **(15p)**

**2.** a) Definiera begreppet inverterbar matris. **(2p)**

b) Beräkna inversen till matrisen **(3p)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Låt $B$ och $C$ vara inverterbara $2 \times 2$ matriser där **(3p)**

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finn inversen till matrisen $D = BC^T$.

**Lösningsförslag:**

a) En kvadratisk matris $A$ är inverterbar om det finns en matris $B$ av samma storlek sådan att

$$BA = I = AB.$$

b) Gausseliminering ger

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -2 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -2 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

dvs

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

c)

$$D^{-1} = (BC^T)^{-1} = (C^T)^{-1}B^{-1} = (C^{-1})^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \left( \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -8 & 6 \\ 4 & 22 \end{bmatrix}.$$

■

**3**. Låt punkterna $A = (1, -1, 0)$, $B = (2, 1, 2)$ och $C = (0, 1, -2)$ vara givna.

a) Beräkna arean till triangeln med hörn $A$, $B$ och $C$. **(3p)**

b) Beskriv (med en ekvation) planet $\Pi$ som går genom punkterna $A$, $B$ och $C$. **(2p)**

c) Beräkna minsta avståndet från punkten $P = (1, 2, 3)$ till planet $\Pi$. **(2p)**

**Lösningsförslag:**

a) Arean till $\triangle ABC$ är lika med hälften av arean till parallellogrammen som spänns av $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$. Dvs

$$\text{Area}(\triangle\text{ABC}) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right| = \sqrt{20}.$$

b) $\boldsymbol{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-8, 0, 4)^T = (n_1, n_2, n_3)^T$ är normalvektor till $\Pi$. Sedan planet går genom punkten $A$ kan mängden av punkter i planet skrivas

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)n_1 + (y-(-1))n_2 + (z-0)n_3 = 0\}$$

som ger planets ekvation

$$\Pi : -8(x-1) + 4z = 0.$$

c) Minsta avståndet är lika med längden av vinkelräta projektionen av $\overrightarrow{AP}$ på normalvektorn $\boldsymbol{n}$ från uppgift b). Sedan $\overrightarrow{AP} = (0, 3, 3)^T$ får vi

$$\text{proj}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{AP} = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AP}}{|\boldsymbol{n}|} \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{12}{\sqrt{80}} \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{3}{\sqrt{5}} \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|},$$

som ger

$$\text{Minsta avstånd} = |\text{proj}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{AP}| = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

■

**4**. Anpassa med minsta kvadratmetoden en rät linje $y = c_1 + c_2 x$ till punkterna **(3p)**

$$(-2, 3),\ (-1, 1),\ (0, 0) \quad \text{och} \quad (2, -1).$$

**Lösningsförslag:**

Ekvationssystem:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{=\boldsymbol{c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{=\boldsymbol{b}}.$$

Minstakvadratlösningen till detta ekvationssystemet kan beräknas vid att lösa normalekvationen $A^T A\boldsymbol{c} = A^T\boldsymbol{b}$ där

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A^T\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Det ger

$$\boldsymbol{c} = \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} = \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 18 \\ -33 \end{bmatrix}.$$

■

**5.** a) Beskriv vad som menas med att en mängd vektorer $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ är linjärt beroende. **(2p)**

b) Avgör om följande vektorer är linjärt beroende **(3p)**

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Lösningsförslag:**

a) Vektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ är linjärt beroende om ekvationen

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots x_k\boldsymbol{v}_k = 0$$

har minst en icke-trivial lösning $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)^T \neq 0$.

b) Vektorerna är linjärt beroende endast om ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

har minst en icke-trivial lösning $\boldsymbol{x} \neq 0$. Gausseliminering ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Konklusion: ekvationssystemet har entydiga lösningen $\boldsymbol{x} = 0$ så vektorerna är linjärt *oberoende.*

■

## Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

**6**. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar.
(Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

a) Om både $F_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och $F_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ är linjära avbildningar så måste också avbildningen $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ definierad som **(2p)**

$$G(\boldsymbol{x}) = F_2(F_1(\boldsymbol{x})) \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

vara linjär.

b) För tre godtyckliga vektorer i $\mathbb{R}^3$, **(2p)**

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

så gäller följande

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \det([\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]),$$

där $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$ betecknar $3 \times 3$ matrisen med kolonner $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$.

c) Om $A$, $B$ och $C$ är kvadratiska matriser av samma storlek där $A$ kommuterar med $B$ och $B$ kommuterar med $C$, så måste $A$ kommutera med $C$. **(2p)**

d) Om $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ är linjärt oberoende så måste följande matris vara inverterbar: **(2p)**

$$B = [\boldsymbol{a}_1 \quad (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) \quad (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3)].$$

(Förtydligande: kolonn nr k i matrisen $B$ är lika med $\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{a}_j$ för $1 \leq k \leq 3$.)

**Lösningsförslag:**

a)Om $F_1$ och $F_2$ är linjära gäller följande för alla $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ och $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$G(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = F_2(F_1(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) = F_2(F_1(\boldsymbol{x}) + F_1(\boldsymbol{y})) = F_2(F_1(\boldsymbol{x})) + F_2(F_1(\boldsymbol{y})) = G(\boldsymbol{x}) + G(\boldsymbol{y})$$

och

$$G(\alpha\boldsymbol{x}) = F_2(F_1(\alpha\boldsymbol{x})) = F_2(\alpha F_1(\boldsymbol{x})) = \alpha F_2(F_1(\boldsymbol{x})) = G(\boldsymbol{x}).$$

Konklusion: $G$ är linjär och påstanden är sann.

b) Påstanden är sann:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\
&= a_1 \det(\begin{bmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix}) - a_2 \det(\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix}) + a_3 \det(\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}) \\
&= \det([\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]).
\end{aligned}$$

c) Påstanden är falsk. Motexempel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ger trivialt att

$$AB = A = BA \quad \text{och} \quad BC = C = CB,$$

men

$$AC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq CA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d) Påstanden är sann: Om vektorerna $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ är linjärt oberoende så är $\det([\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]) \neq 0$. Ekvationen

$$B = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ger vidare att

$$\det(B) = \det([\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]) \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det([\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]) \neq 0$$

som implicerar att $B$ är inverterbar. ■

**(4p)**

**7.** Beskriv mängden av alla $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ sådana att

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 4 \end{bmatrix}$$

kommuterar.

**Lösningsförslag:**

$$AB = \begin{bmatrix} a + 2c & b + 8 \\ 3a + 4c & 3b + 16 \end{bmatrix}$$

och

$$BA = \begin{bmatrix} a + 3b & 2a + 4b \\ c + 12 & 2c + 16 \end{bmatrix}.$$

För att $AB = BA$ måste följande ekvationer gälla

$$\begin{aligned} a + 2c &= a + 3b \\ b + 8 &= 2a + 4b \\ 3a + 4c &= c + 12 \\ 3b + 16 &= 2c + 16 \end{aligned}.$$

Det kan skrivas som ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Gausseliminering ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Konklusion: Lösningsmängden $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ så att $AB = BA$ kan betraktas som alla punkter på räta linjen

$$L: \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

■

Lycka till!
Håkon Hoel

| Anonym kod | MVE520 Linjär algebra 2018-08-29 | sid.nummer 1 | Poäng |
|---|---|---|---|
| | | | |

**1.** Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix}2\\-3\\0\end{bmatrix}$$

och beräkna:

i. $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c}$, **(1p)**

ii. $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$, **(1p)**

iii. $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$, **(1p)**

iv. och vinkeln mellan $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$. **(1p)**

**Lösningsförslag:**

i.

$$\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix}1+2(3)-3(2)\\2+2(-2)-3(-3)\\1+2(1)-3(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\7\\3\end{bmatrix}.$$

ii.

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}5\\-5\\1\end{bmatrix} = 1(5) + 2(-5) + 1(1) = -4.$$

iii.

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix}b_2c_3 - b_3c_2\\b_3c_1 - b_1c_3\\b_1c_2 - b_2c_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\\-5\end{bmatrix}.$$

iv. Vinkeln mellan $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ är definierad som entydiga $\theta \in [0, \pi]$ som uppfyller ekvationen

$$\cos(\theta) = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

Sedan $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ följer det att $\theta = \pi/2$. ■

(b) i. Beräkna matrisprodukten $AB$ där **(2p)**

$$A = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&-2&1\\2&3&5\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix}1&1\\1&0\\1&1\end{bmatrix}.$$

**(2p)**

ii. Låt $C$, $D$ och $E$ vara rektangulära matriser sådana att $CD$ är en $m \times n$ matris och $DE$ är en $p \times k$ matris. Beskriv storleken till matriserna $C$ och $E$.

**Lösningsförslag:**

i.

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-2&1\\2&3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\\1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&2\\0&2\\10&7\end{bmatrix}.$$

ii. $CD \in \mathbb{R}^{m\times n}$ implicerar att $C$ har $m$ rader, $D$ har $n$ kolonner och $C$ har samma antal kolonner som $D$ har rader. $DE \in \mathbb{R}^{p\times k}$ implicerar att $D$ har $p$ rader, $E$ har $k$ kolonner och antal kolonner i $D$ är lika med antal rader i $E$. Vi konkluderar direkt att $D$ är $p \times n$ matris, som vidare ger att $C$ är $m \times p$ och $E$ är $n \times k$. ■

(c) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

i. Beräkna $\det(A)$ **(3p)**

ii. Låt $B$ vara en $4 \times 4$ matris med $\det(B) = 3$. Bestäm $\det(ABBA)$. **(2p)**

iii. Låt $C = [\boldsymbol{c}_1\ \boldsymbol{c}_2\ \boldsymbol{c}_3]$ vara en $3 \times 3$ matris där $\boldsymbol{c}_k$ betecknar matrisens $k$-te kolonn. Ge en geometrisk tolkning av $|\det(C)|$. **(2p)**

**Lösningsförslag:** i.

$$\begin{aligned}\det(A) &= 2\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}\right) - \det\left(\begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= 2\left(3\det(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}) - \det(\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix})\right) - \left(6\det(\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}) + \det(\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix})\right) \\ &= 2(45 - 21) - (6(4) + 4) = 48 - 28 = 20.\end{aligned}$$

ii.

$$\det(ABBA) = \det(A)\det(BBA) = \ldots = (\det(A))^2(\det(B))^2 = 400 \cdot 9 = 3600.$$

iii. $|\det(C)|$ är volymen till parallellepipeden som spänns upp av vektorerna $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2$ och $\boldsymbol{c}_3$. ■