MVE520 Dugga 1 - A - Lösning

---

1. Beräkna vinkeln mellan vektorerna $(-1, 1, -2)$ och $(1, 0, 1)$. (2p)

Lösning:

$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}||} = \frac{-1+0-2}{(\sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2})\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \theta = \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

2. Beräkna arean av triangeln OAB där $A = (2, 1, 2)$, $B = (1, -1, 1)$ och O är Origo ($O = (0, 0, 0)$). (2p)

Lösning:
Area $= \frac{1}{2}||\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}||$

$\overrightarrow{OA} = (2, 1, 2)$ och $\overrightarrow{OB} = (1, -1, 1)$.

$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = (1 + 2, 2 - 2, -2 - 1) = (3, 0, -3)$.

Alltså Area$=\frac{1}{2}\sqrt{3^2 + (-3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{18} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

3. Bestäm en ekvation till planet som går genom punkten $A = (-1, 3, 0)$ och är vinkelrät med linjen $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. (2p)

Lösning:
En normal vektor till planet är en riktningsvektor till linjen, t.ex $\overrightarrow{n} = (2, -2, 3)$.

Plansekvation:

$$\begin{aligned} 2(x + 1) - 2(y - 3) + 3z &= 0 \\ 2x + 2 - 2y + 6 + 3z &= 0 \\ 2x - 2y + 3z &= -8 \end{aligned}$$

MVE520 Dugga 1 - B - Lösning

---

1. Beräkna vinkeln mellan vektorerna $(1,2,1)$ och $(-1,-1,0)$. (2p)
Lösning:

$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}||} = \frac{-1-2+0}{(\sqrt{(1^2+2^2+1^2)}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \theta = \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

2. Beräkna arean av triangeln OAB där $A=(1,2,1)$, $B=(-1,1,1)$ och O är Origo $(O=(0,0,0))$. (2p)
Lösning:

Area $= \frac{1}{2}||\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}||$

$\overrightarrow{OA} = (1,2,1)$ och $\overrightarrow{OB} = (-1,1,1)$.

$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB} = (2-1,-1-1,1+2) = (1,-2,3)$.

Alltså Area$=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{14}$.

3. Bestäm en ekvation till planet som går genom punkten $A=(1,-1,2)$ och är vinkelrät med linjen $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 4t \\ z = -1-t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$. (2p)

Lösning:
En normal vektor till planet är en riktningsvektor till linjen, t.ex $\overrightarrow{n} = (1,4,-1)$.
Plansekvation:

$$\begin{aligned} 1(x-1)+4(y+1)-(z-2) &= 0 \\ x-1+4y+4-z+2 &= 0 \\ x+4y-z &= -5 \end{aligned}$$