A

1. Lös följande systemet: $\begin{cases} x \quad\quad - z = 8 \\ 2x - y + 2z = 3 \end{cases}$

Lösning: (2p)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) -2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & -1 & 4 & -13 \end{array}\right) \cdot (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 13 \end{array}\right)$$

Låt $z = t$. $\quad x - z = 8 \Rightarrow x = z + 8 = t + 8$

$y - 4z = 13 \Rightarrow y = 4z + 13 = 4t + 13$

Svar: $\begin{cases} x = t + 8 \\ y = 4t + 13 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

2. Avgör om följande vektorerna är linjärt oberoende: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. (3p)

Lösning:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} -2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(-\tfrac{1}{5}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} 1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} -2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0 \Rightarrow v_1, v_2, v_3$ är linjärt oberoende.

3. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning definierad av $T(\mathbf{v}) = \mathrm{A}\mathbf{v}$ där $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Beräkna $T\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. (1p)

Lösning:

$$T\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 4-1 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B

1. Lös följande systemet: $\begin{cases} x \quad\quad - 2z &= 5 \\ 3x - y + 2z &= 1 \end{cases}$ (2p)

Lösning:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \cdot(-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 8 & -14 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -8 & 14 \end{array}\right)$$

Låt $z = t \Rightarrow \begin{cases} x - 2z = 5 & \Rightarrow x = 2z + 5 = 2t + 5 \\ y - 8z = 14 & \Rightarrow y = 8z + 14 = 8t + 14 \end{cases}$

Svar: $\begin{cases} x = 2t+5 \\ y = 8t+14 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

2. Avgör om följande vektorerna är linjärt oberoende: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. (3p)

Lösning:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} (-2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot -1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot (3)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (1) \; (-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (-2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0 \Rightarrow v_1, v_2, v_3$ är linjärt oberoende

3. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning definierad av $T(\mathbf{v}) = \mathrm{A}\mathbf{v}$ där $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Beräkna $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. (1p)

Lösning:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ -1+2 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$