A

1. Bestäm matrisen X sådana att $XA - 2X = B$ där $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. (2p)

Lösning:

$XA - 2X = X(A - 2I) = B \Rightarrow X = B(A-2I)^{-1}$ om $A - 2I$ är inverterbar.

$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - 3I) = -3 \neq 0 \Rightarrow A - 2I$ är inverterbar

$(A-2I)^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

$(A-2I)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = B(A-2I)^{-1}$

Svar: $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Låt $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ y - z = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$ vara ett ekvationssystem. Bestäm z med hjälp av Cramers regel. (2p)

Lösning:

$AX = b$ där $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ och $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$z = \frac{\det(A_i(b))}{\det(A)} = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{-2-3} = -\frac{1}{5}.$$

Svar: $z = -\frac{1}{5}$

3. Bestäm inversen till matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (1p)

Lösning:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Svar: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

B

1. Bestäm matrisen X sådana att $XA - 3X = B$ där $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. (2p)

Lösning:

$XA - 3X = X(A - 3I) = B \Rightarrow X = B(A-3I)^{-1}$ om $A - 3I$ är inverterb.

$A - 3I = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A-3I) = -2 \neq 0 \Rightarrow A-3I$ är $\therefore$ inverterbar

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = (A-3I)^{-1}$

$(A-3I)^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = B(A-3I)^{-1}$

Svar: $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

2. Låt $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ y - z = 2 \\ x - z = 0 \end{cases}$ vara ett ekvationssystem. Bestäm z med hjälp av Cramers regel. (2p)

Lösning:

$AX = b$ där $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$z = \frac{\det A_3(b)}{\det A} = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}} = \frac{1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{-3-2} = -\frac{3}{5}$$

Svar: $z = -\frac{3}{5}$

3. Bestäm inversen till matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (1p)

Lösning:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) (-3)\ (1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Svar: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$