LMA515c Dugga 1

Variant 1.

1. Beräkna vinkeln mellan vektorerna $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$. (1p)

Lösning:

$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} = 4(-1) + 1(-5) + 3 \cdot 3 = 0$ så de är vinkelräta, dvs vinkeln är $\pi/2$.

2. Ange på **parameterfri** form ekvationen för den linje som går genom punkterna $P = (0, -1, 3)$ och $Q = (2, 1, 0)$. (2p)

Lösning:

Linjen har riktning $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 2-0 \\ 1-(-1) \\ 0-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ och går genom P så linjen kan skrivas $\begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$. Lös ut t och sätt lika så får man den parameterfria formen $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-3}$.

3. Bestäm en ekvation för det plan som går genom punkterna $A = (1, 1, 3)$, $B = (1, 0, 2)$ och $C = (3, -1, 4)$. (3p)

Lösning:

Vektorerna $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ligger i planet så en normal till planet fås av

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \hat{x} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \hat{y} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \hat{z} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Planet går genom A, så planets ekvation blir $-3(x-1) - 2(y-1) + 2(z-3) = 0$. Detta kan förenklas till $-3x - 2y + 2z = 1$.

LMA515c Dugga 1

Variant 2.

1. Ange på **parameterfri** form ekvationen för den linje som går genom punkterna $P = (2, 1, -2)$ och $Q = (4, 0, 1)$. (2p)

Lösning:

Linjen har riktning $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 4-2 \\ 0-1 \\ 0-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ och går genom P så linjen kan skrivas $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1-t \\ z = -2+3t \end{cases}$. Lös ut t och sätt lika så får man den parameterfria formen $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{3}$.

2. Beräkna vinkeln mellan vektorerna $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. (1p)

Lösning:

$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 \cdot 1 + 2(-2) + 3 \cdot 2 = 0$ så de är vinkelräta, dvs vinkeln är $\pi/2$.

3. Bestäm en ekvation för det plan som går genom punkterna $A = (2, 0, 3)$, $B = (2, 1, 2)$ och $C = (3, 4, 1)$. (3p)

Lösning:

Vektorerna $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ ligger i planet så en normal till planet fås av

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \hat{x} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \hat{y} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \hat{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Planet går genom A, så planets ekvation blir $2(x-2) - y - (z-3) = 0$. Detta kan förenklas till $2x - y - z = 1$.