

LMA515c Dugga 1, 2017-01-30

Variant 1.

1. Beräkna vinkeln mellan vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$. (1p)

Lösning:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 5(-2) + (-2)(-3) = 0 \text{ så de är vinkelräta, dvs vinkeln är } \frac{\pi}{2}.$$

2. Bestäm skärningspunkten mellan planet $2x + 3y - z = -5$ och linjen $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}$. (3p)

Lösning:

Linjen kan skrivas $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$. Insättning i planets ekvation ger

$$-5 = 2x + 3y - z = 2(-1 - 2t) + 3(2 + 3t) - (3 - t) = 6t + 1 \text{ som ger } t = -1. \text{ Detta ger punkten } (-1 - 2t, 2 + 3t, 3 - t) = (1, -1, 4).$$

3. Beräkna kryssprodukten $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. (2p)

Lösning:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \hat{x} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \hat{y} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \hat{z} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

LMA515c Dugga 1, 2017-01-30

Variant 2.

1. Beräkna kryssprodukten $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$. (2p)

Lösning:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \hat{x} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \hat{y} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \hat{z} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Beräkna vinkeln mellan vektorerna $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$. (1p)

Lösning:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = 3 \cdot 2 + (-2)4 + (-1)(-2) = 0 \text{ så de är vinkelräta, dvs vinkeln är } \frac{\pi}{2}.$$

3. Bestäm skärningspunkten mellan planet $2x + 3y - z = 1$ och linjen $\frac{x+1}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. (3p)

Lösning:

Linjen kan skrivas $\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$. Insättning i planets ekvation ger

$1 = 2x + 3y - z = 2(-1 - 3t) + 3(1 + 2t) - (2 - t) = t - 1$ som ger $t = 2$. Detta ger punkten $(-1 - 3t, 1 + 2t, 2 - t) = (-7, 5, 0)$.