MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: inga
Datum: 2016-03-17 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Christoffer Standar
031-772 5325

LMA515c

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2015 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Punkterna $A = (-1, 2, 0), B = (-1, 4, 2)$ och $C = (1, 4, 1)$ bildar en triangel.

(a) Bestäm vektor-projektionen av $\overrightarrow{AC}$ på $\overrightarrow{AB}$. (2p)

(b) Bestäm triangelns vinkel vid punkten A med hjälp av skalärprodukt. (2p)

(c) Bestäm triangelns area. (2p)

3. (a) Om A och B är inverterbara matriser, beskriv $(AB)^{-1}$ uttryckt i A^{-1} och B^{-1}. (1p)

(b) Beräkna A^{-1}, B^{-1}, $(AB)^{-1}$ och verifiera att din formel stämmer för matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(4p)

4. (a) Definiera vad som menas med en minstakvadratlösning till en ekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (2p)

(b) Anpassa med minsta kvadrat metoden ett homogent andragradspolynom $y = a + bt^2$ till följande mätdata

t	-2	-1	0	1
y	8	1	2	3

(4p)

(c) Hur stort blev minstakvadratfelet? (2p)

5. (a) Bestäm för vilka värden på konstanten a som vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ a \end{bmatrix}$ är en linjärkombination (4p)

av vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

(b) Är $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ linjärt oberoende? Motivera ditt svar. (1p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om A och B är 2×2 matriser så är $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$. (1p)

(b) Om A är en $m \times n$ matris så är $A^T A$ kvadratisk. (1p)

(c) För två vektorer $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$. (1p)

(d) För en $n \times n$ matris A är $\det(2A) = 2^n \det(A)$. (1p)

7. Bestäm avståndet mellan linjen $-x + 2 = \dfrac{y+1}{2} = z - 3$ och planet $x - y + 3z = 1$. (4p)

8. Låt F och G vara avbildningar från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ där F är en spegling i $y = x$ och G är en vridning $\dfrac{\pi}{2}$ moturs.

(a) Bestäm matrisen för den sammansatta avbildningen om man först vrider och sedan speglar. (3p)

(b) Får man samma resultat om man speglar först och sedan vrider, d.v.s. kommuterar avbildningarna? (1p)

Lycka till!
Thomas Bäckdahl

Anonym kod	**LMA515c 2016-03-17**	sid.nummer **1**	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Finn alla lösningar till ekvationssystemet $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -2 \\ -3x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & - & 3y & - & z & = & 3 \end{array}\right.$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm en ekvation för det plan som går genom punkterna $A = (2, -1, 0)$, $B = (1, 0, 3)$ och $C = (4, -1, 1)$. (4p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Matriserna $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ är givna.

Lös matrisekvationen $XB - X = A$. (4p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Lösning: (3p)

Svar: ....