MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: inga
Datum: 2016-03-17 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Christoffer Standar
031-772 5325

LMA515c

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2016 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Punkterna $A = (-1, 2, 0), B = (-1, 4, 2)$ och $C = (1, 4, 1)$ bildar en triangel.

(a) Bestäm vektor-projektionen av $\overrightarrow{AC}$ på $\overrightarrow{AB}$. (2p)

Lösning: $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ger

$$\text{Proj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|^2} \overrightarrow{AB} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}{4+4} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{4+2}{8} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

(b) Bestäm triangelns vinkel vid punkten A med hjälp av skalärprodukt. (2p)

Lösning: Låt θ vara vinkeln vid A. Då är $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}| \cos\theta$. Vi har $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 6$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ och $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+4+1} = 3$. Så $\theta = \arccos\left(\frac{6}{2\sqrt{2} \cdot 3}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

(c) Bestäm triangelns area. (2p)

Lösning: Triangelns area är $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \hat{x} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \hat{y} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \hat{z} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Således är triangelns area $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{4+16+16} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$.

3. (a) Om A och B är inverterbara matriser, beskriv $(AB)^{-1}$ uttryckt i A^{-1} och B^{-1}. (1p)

Svar: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(b) Beräkna A^{-1}, B^{-1}, $(AB)^{-1}$ och verifiera att din formel stämmer för matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(4p)

Lösning:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{②-① \\ ③+①}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{①-③ \\ ②+2③}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{①+② \\ -②}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{①\leftrightarrow②}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{②\leftrightarrow③}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{③+①}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{③+②}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{①-③ \\ ②-③}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{①+② \\ -②}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Så $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Formeln i (a) uppgiften stämmer ty $B^{-1}A^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (AB)^{-1}.$$

4. (a) Definiera vad som menas med en minstakvadratlösning till en ekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (2p)
Svar: Definitionsmässigt är $\hat{\mathbf{x}}$ mistakvadratlösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ om $|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}| \leq |A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$ för alla vektorer $\mathbf{x}$.

(b) Anpassa med minsta kvadrat metoden ett andragradspolynom av formen $y = a + bt^2$ till följande mätdata

t	-2	-1	0	1
y	8	1	2	3

.

(4p)

Lösning: Designmatrisen blir $A = \begin{bmatrix} 1 & t_1^2 \\ 1 & t_2^2 \\ 1 & t_3^2 \\ 1 & t_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, mätdata $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ och parametervektorn $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{x}}$ löser normalekvationerna $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{y}$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}, \quad A^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 36 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 18 & 36 \end{array}\right] \underset{\substack{\frac{1}{2}① \\ \frac{1}{6}②}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 6 \end{array}\right] \underset{①\leftrightarrow②}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 7 \end{array}\right] \underset{②-2①}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 \end{array}\right] \underset{\substack{①+② \\ -\frac{1}{3}②}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right].$$

Svar: $a = 1$ och $b = 5/3$, alltså $y = 1 + \frac{5}{3}t^2$ minimerar minstakvadratfelet.

(c) Hur stort blev minstakvadratfelet? (2p)

Lösning: $\mathbf{x} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ ger $A\mathbf{x} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 23 \\ 8 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$ och $A\mathbf{x} - \mathbf{y} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 23-24 \\ 8-3 \\ 3-6 \\ 8-9 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$,

så $|A\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \frac{1}{3}\sqrt{1+25+9+1} = \frac{1}{3}\sqrt{36} = \frac{6}{3} = 2$.

Svar: Minstakvadratfelet blir 2.

5. (a) Bestäm för vilka värden på konstanten a som vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ a \end{bmatrix}$ är en linjärkombination (4p)

av vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

(b) Är $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ linjärt oberoende? Motivera ditt svar. (1p)

Lösning: Vektorekvationen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}$ kan skrivas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 8 & a \end{array}\right] \underset{\substack{③-2① \\ \frac{1}{2}②}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & a-10 \end{array}\right] \underset{③+5②}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right].$$

Så ekvationen har lösning omm $a = 5$.

(a) **Svar:** $\mathbf{u}$ är en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ omm $a = 5$.

(b) Trappstegsmatrisen till $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ (vänsterledet ovan) har endast två pivot-kolonner. Därför finns icke triviala lösningar till $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Alltså är $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ är linjärt beroende.

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om A och B är 2×2 matriser så är $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$. (1p)

Svar: Falskt. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ är ett motexempel ty $\det A = 0$ och $\det B = 0$ men $\det(A+B) = \det I = 1$.

(b) Om A är en $m \times n$ matris så är A^TA kvadratisk. (1p)

Svar: Sant. A^T är $n \times m$ matris så A^TA är $n \times n$ matris.

(c) För två vektorer $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$. (1p)

Svar: Falskt. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

(d) För en $n \times n$ matris A är $\det(2A) = 2^n \det(A)$. (1p)
Svar: Sant. Bryt ut en faktor 2 från varje rad i $2A$ ger totalt 2^n som utbruten faktor.

7. Bestäm avståndet mellan linjen $-x+2 = \dfrac{y+1}{2} = z-3$ och planet $x-y+3z=1$. (4p)

Lösning: Linjen kan skrivas som $\begin{cases} x = 2-t \\ y = -1+2t \\ z = 3+t \end{cases}$ och har riktning $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Planet har normal $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Linjen är vinkelrät mot normalen ty $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -1-2+3 = 0$. Alltså är linjen parallell med planet, så avståndet mellan planet och vilken punkt som helst på linjen är oberoende av vilken punkt vi väljer på linjen. Väl t.ex. $P_1 = (2,-1,3)$. Låt $P = (x,y,z)$ vara en punkt i planet och låt $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ och $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. $\overrightarrow{PP_1} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$. Avståndet mellan P_1 (eller linjen) och planet är beloppet den skalära projektionen av $\overrightarrow{PP_1}$ på normalen

$$\left|\operatorname{Comp}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{PP_1}\right| = \frac{|\overrightarrow{PP_1}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{n} - \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|\overbrace{(2-(-1)+3\cdot 3)}^{12} - \overbrace{(x-y+3z)}^{1}|}{\sqrt{1+1+9}} = \sqrt{11},$$

där vi använt att $P = (x,y,z)$ ligger i planet.
Svar: Avståndet är $\sqrt{11}$.

8. Låt F och G vara avbildningar från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ där F är en spegling i $y=x$ och G är en vridning $\dfrac{\pi}{2}$ moturs.

(a) Bestäm matrisen för den sammansatta avbildningen om man först vrider och sedan speglar. (3p)

(b) Får man samma resultat om man speglar först och sedan vrider, d.v.s. kommuterar avbildningarna? (1p)

Lösning:

(a) Spegelbilden $\hat{x}$ blir $\hat{y}$ och vice versa. $F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ger $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ med $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. $\hat{x}$ vrids till $\hat{y}$ och $\hat{y}$ vrids till $-\hat{x}$. $G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ger $G(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ med $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Sammansättning med vridning först $F(G(\mathbf{x})) = AB\mathbf{x}$. $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Svar: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(b) Sammansättning med spegling först $G(F(\mathbf{x})) = BA\mathbf{x}$. $BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -AB \neq AB$.
Svar: Nej, avbildningarna kommuterar inte.

Hoppas att det gick bra!
Thomas Bäckdahl

Anonym kod	LMA515c 2016-03-17	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Finn alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ -3x - y + 3z = 1 \\ x - 3y - z = 3 \end{cases}$. (3p)

Lösning:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Svar: $x = t$, $y = -1$, $z = t$ där t är en parameter.

(b) Bestäm en ekvation för det plan som går genom punkterna $A = (2, -1, 0)$, $B = (1, 0, 3)$ och $C = (4, -1, 1)$. (4p)

Lösning: Vektorerna $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ är ortogonala mot normalen $\mathbf{n}$, så vi kan välja

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \hat{x} - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \hat{y} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \hat{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Punkt-normal form för planet genom A är $x - 2 + 7(y + 1) - 2z = 0$, som kan skrivas som

Svar: $x + 7y - 2z = -5$.

(c) Matriserna $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ är givna.

Lös matrisekvationen $XB - X = A$. (4p)

Lösning: $XB - X = A \Leftrightarrow X(B - I) = A \Leftrightarrow X = A(B - I)^{-1}$ om $(B - I)^{-1}$ existerar.

$$B - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \det(B - I) = -1, \qquad (B - I)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = A(B - I)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Svar: $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Lösning: Utveckla efter tredje kolonnen, radreducera första kolonnen och utveckla efter andra raden. (3p)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -3(-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 9(-1)$$

Svar: -9