MATEMATIK — **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola — Datum: 2016-04-08 kl. 08.30–12.30

Tentamen — Telefonvakt: Anna Persson

ankn 5325

LMA515c och LMA033b

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2015 och 2016 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (15p)

2. (a) Lös ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ i minsta kvadratmening då $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. (4p)

(b) Hur stort blev minsta kvadrat felet? (2p)

(c) Kontrollera att felvektorn $A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$ är ortogonal mot kolonnerna i A om $\hat{\mathbf{x}}$ är minsta kvadratlösningen. (2p)

3. (a) Om A är en inverterbar matris, beskriv $(A^T)^{-1}$ uttryckt i A^{-1}. (1p)

(b) Beräkna A^{-1} och $(A^T)^{-1}$ och verifiera att din formel stämmer för matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

(3p)

4. Planen $\Pi_1 : x + 2y - z = 1$ och $\Pi_2 : 2x - 2y + z = -4$ är givna

(a) Bestäm skärningslinjen mellan planen med hjälp av kryssprodukt. Motivera metoden. (2p)

(b) Bestäm skärningslinjen mellan planen genom att lösa ett ekvationssystem. (2p)

(c) Bestäm vinkeln mellan planen. (2p)

5. (a) Definiera vad som menas med att tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ är linjärt beroende. (2p)

(b) Bestäm för vilka värden på konstanten a som vektorerna (3p)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ a \\ 2 \end{bmatrix}$$

blir linjärt beroende.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$ så är $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathrm{Proj}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a}) = 0$. (1p)

(b) Om A är en $m \times n$ matris med $m < n$ så har $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oändligt många lösningar. (1p)

(c) Om $P = (a, b, c)$ och $Q = (d, e, f)$ är punkter i $\mathbb{R}^3$ så är vektorn $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} a-d \\ b-e \\ c-f \end{bmatrix}$. (1p)

7. Bestäm projektionen av linjen $-x + 3 = \dfrac{y+1}{2} = z - 3$ på planet $x - y + z = 1$. (4p)

8. Om $\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ motsvarar polynomet $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ och $\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ motsvarar polynomet $b_0 + b_1 x$. Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vara avbildnigen som motsvarar derivering av andragradspolynom och låt $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildnigen som motsvarar integrering av förstagradspolynom med integrationskonstant $C = 0$.

(a) Visa att avbildningarna F och G är linjära. (1p)

(b) Bestäm matriserna för avbildningarna F och G. (2p)

(c) Bestäm matriserna för sammansättningarna $F \circ G$ och $G \circ F$. Är G invers till F? (2p)

Lycka till!
Thomas Bäckdahl

Anonym kod	LMA515c och LMA033b 2016-04-08	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Finn alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x - y = -1 \\ -x + 2z = 4 \end{cases}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm på parameterform linjen som går genom punkterna $A = (1, -2, -3)$ och $B = (2, 1, -1)$. Avgör också om punkten $C = (4, 7, 3)$ ligger på linjen. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Lös matrisekvationen $AX + X = B$ då $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (4p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

Lösning: (2p)

Svar: ....

(e) Beräkna kryssprodukten $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ för vektorerna $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Lösning: (3p)

Svar: ....