MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2017-03-16 kl. 08.30–12.30

Tentamen Telefonvakt: Henrik Imberg

ankn 5325

Lösningsförslag LMA515c

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2017 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Givet punkterna $A = (2, 1, 3)$, $B = (3, 1, 1)$ och $C = (1, 2, 3)$, bestäm planet som går genom punkterna. (3p)

Lösning: Vektorerna $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ är parallella med planet så $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ är ortogonal mot planet. Längden på normalen spelar ingen roll, så vi kan välja normal $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Planet går genom punkten A, så planets ekvation blir $2(x - 2) + 2(y - 1) + (z - 3) = 0$ som även kan skrivas $2x + 2y + z = 9$.

(b) Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna A, B och C. (1p)

Lösning: Arean är $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}| = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 2^1 + 1} = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}$.

(c) Bestäm vektorprojektionen av $\overrightarrow{AB}$ på $\overrightarrow{AC}$. (2p)

Lösning:

$$\mathrm{Proj}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AC} = \frac{-1}{2} \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Matriserna $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ är givna.

(a) Beräkna $(A^T A)^{-1}$. (2p)

Lösning: $A^T A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\det(A^T A) = 5$, $(A^T A)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$.

(b) Beräkna B^{-1}. (3p)

Lösning:

$$[B|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Lös matrisekvationen $BXA^TA = C$, där X är den sökta matrisen. (3p)
Lösning: $BXA^TA = C \Leftrightarrow XA^TA = B^{-1}C \Leftrightarrow X = B^{-1}C(A^TA)^{-1}$.

$$X = B^{-1}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. (a) Anpassa med minstkvadratmetoden en rät linje $y = a + bt$ till följande mätdata

t	-2	-1	0	1
y	-4	-1	1	2

(4p)

Lösning: Designmatrisen blir $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och observationsvektorn $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
Minstkvadrat-lösningen $\hat{\mathbf{x}}$ löser normalekvationerna $A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{y}$. Vi får $A^TA = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$, $A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 11 \end{bmatrix}$, $\det(A^TA) = 20$, $(A^TA)^{-1} = \dfrac{1}{20}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.
Minstkvadrat-lösningen blir $\hat{\mathbf{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$, så den anpassade linjen är $y = \frac{1}{2} + 2t$.

(b) Hur stort blev kvadratiska medelfelet? (2p)

$$\mathbf{y} - A\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Kvadratiska medelfelet blir $\dfrac{1}{\sqrt{n}}|\mathbf{y} - A\hat{\mathbf{x}}| = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{1+1+1+1}}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$.

5. (a) Definiera vad som menas med att tre vektorer i $\mathbb{R}^4$ är linjärt beroende. (1p)
Svar: Tre vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ är linjärt beroende om ekvationen $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ har icke-triviala lösningar.

(b) Avgör ifall vektorerna (3p)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

är linjärt beroende.
Lösning:

$$[\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3|\mathbf{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Systemet har en fri variabel x_3 så icke triviala lösningar existerar och vektoerena är således linjärt beroende.

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar.
(Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Man kan balansera en kemisk reaktionsformel endast om vektorerna som motsvarar de ingående molekylerna är linjärt beroende. (1p)
Svar: Sant. Låt $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vara vektorerna som motsvarar de ingående molekylerna. Balanseringen av reaktionsformeln kan då skrivas $x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ där x_i ska vara positiva för de molekyler som finns före reaktionen och negativa för de efter reaktionen. Om vektorerna skulle vara linjärt oberoende skulle ekvationen endast ha lösningen $x_i = 0$ för alla $i = 1 \ldots n$ vilket inte ger någon balanserad reaktionsformel. Därför måste vektorerna vara linjärt beroende.

(b) Om vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vektorer i $\mathbb{R}^3$ så är $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$. (1p)
Svar: Sant. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \underset{②-①}{=} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$

(c) Om A är en 3×3 matris så är $\det(2A) = 2\det(A)$. (1p)
Svar: Falskt. Bryter man ut en faktor 2 från varje rad får man $\det(2A) = 2^3 \det(A)$.

(d) Om A, B och C är matriser sådana att $C = AB$ och C har två rader så måste B ha två rader. (1p)
Svar: Falskt. Om t.ex. A är en 2×3 matris och B en 3×4 matris så blir C en 2×4 matris, så B har tre rader, trots att C har två rader.

7. Beräkna minsta avståndet mellan de två linjerna $\mathbf{L}_1$ och $\mathbf{L}_2$, där $\mathbf{L}_1$ är linjen genom $(0, 1, 3)$ parallell med vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{L}_2$ ges av $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 \\ z = 1 - t \end{cases}$ med parameter $t \in \mathbb{R}$. (4p)

Lösning: Låt $P_1 = (0, 1, 3)$, $P_2 = (2, 2, 1)$, $\mathbf{v}_1 = \hat{x} + \hat{y}$ och $\mathbf{v}_2 = \hat{x} - \hat{z}$. Då går $\mathbf{L}_1$ genom P_1 och är parallell med $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{L}_2$ går genom P_2 och är parallell med $\mathbf{v}_2$.

Låt P_3 och P_4 vara punkterna på $\mathbf{L}_1$ respektive $\mathbf{L}_2$ som ligger närmast varandra. Då kommer $\overrightarrow{P_3P_4}$ vara vinkelrät mot både $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$, så den är parallell med $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Vektoraddition ger $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \overrightarrow{P_4P_2}$. Vektorerna $\overrightarrow{P_1P_3}$ och $\overrightarrow{P_4P_2}$ är parallella med $\mathbf{v}_1$ respektive $\mathbf{v}_2$, så de är båda vinkelräta mot $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Alltså är $\overrightarrow{P_3P_4}$ projektionen av $\overrightarrow{P_1P_2}$ på $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Det sökta avståndet är

$$s = |\overrightarrow{P_3P_4}| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}.$$

Vi beräknar därför $\overrightarrow{P_1P_2} = 2\hat{x} + \hat{y} - 2\hat{z}$ och

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \hat{x} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \hat{y} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \hat{z} = -\hat{x} + \hat{y} - \hat{z}.$$

Vi får $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = 1$ och $|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2| = \sqrt{3}$, så minsta avståndet mellan linjerna är $s = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

8. Låt F och G vara avbildningar från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ där F är en spegling i $y = -x$ och G är en vridning π radianer moturs.

(a) Bestäm matrisen för den sammansatta avbildningen om man först speglar och sedan vrider. (3p)

Lösning: Spegelbilden av $\hat{x}$ är $-\hat{y}$ och spegelbilden av $\hat{y}$ är $-\hat{x}$, så $F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ger $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ med $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

$\hat{x}$ vrids till $-\hat{x}$ och $\hat{y}$ vrids till $-\hat{y}$. $G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ger $G(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ med $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Sammansättning med spegling först $G(F(\mathbf{x})) = BA\mathbf{x}$. $BA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Svar: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) Får man samma resultat om man först vrider och sedan speglar, d.v.s. kommuterar avbildningarna? (1p)

Lösning: Sammansättning med vridning först $F(G(\mathbf{x})) = AB\mathbf{x}$.

$AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = BA$.

Svar: Ja, avbildningarna kommuterar.

Hoppas det gick bra!
Thomas Bäckdahl

Anonym kod	**Lösningsförslag LMA515c 2017-03-16**	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Finn alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -3x - 2y - z = -3 \\ 5x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$. (3p)

Lösning:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & -3 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 3 \\ 0 & -8 & 8 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Svar: Systemet är inkonsistent så lösning saknas.

(b) Givet punkterna $A = (2, -1, 3)$, $B = (3, 1, 2)$ och $C = (-1, 0, 2)$ avgör ifall linjen genom punkterna A och B är vinkelrät mot linjen genom punkterna A och C. (2p)

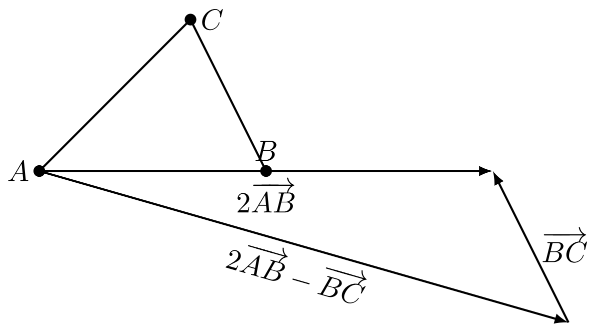
Lösning: Linjerna har riktningar $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Skalärprodukten $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1(-3) + 2 \cdot 1 + (-1)(-1) = 0$, så de är vinkelräta.
Svar: Linjerna vinkelräta.

(c) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. (3p)

Lösning: Utveckling av kolonn 3, radop. ② + 2① och utveckling av kolonn 1 ger

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3(7 - 12) = 15$$

(d) Låt A, B, C vara hörn i en triangel. Illustrera i figur vektorn $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$. (2p)
Lösning:



(e) För vilka värden på parametern s är $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbart då $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & s \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$? Ange även lösningarna $\mathbf{x}$. (4p)

Lösning: $\det A = s - 6$, så ekvationen är lösbar för $s \neq 6$. Lösningarna ges a Cramers regel (eller $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$). $\det A_1(\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & s \end{vmatrix} = -s - 6$ och $\det A_2(\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$, så $\mathbf{x}_1 = \dfrac{\det A_1(\mathbf{b})}{\det A} = \dfrac{-s-6}{s-6}$, $\mathbf{x}_2 = \dfrac{\det A_2(\mathbf{b})}{\det A} = \dfrac{4}{s-6}$.

Svar: $\mathbf{x} = \dfrac{1}{s-6} \begin{bmatrix} -s-6 \\ 4 \end{bmatrix}$.