**MATEMATIK** | **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Datum: 2017-06-09 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Adam Malik
ankn 5325

# LMA515C & LMA033B Matematik

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2017 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

## Del 1: Godkäntdelen

**1.** Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (15p)

**2.** Punkterna $A = (1, 3, -2)$, $B = (3, 2, -3)$ och $C = (2, 4, -4)$ är givna.

(a) Bestäm vektorprojektionen av $\overrightarrow{BC}$ på $\overrightarrow{AC}$. (2p)

(b) Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$. (2p)

(c) Bestäm $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. (2p)

**3.** (a) Lös ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ i minsta kvadratmening då $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. (4p)

(b) Hur stort blev minstakvadratfelet? (2p)

(c) Kontrollera att felvektorn $A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$ är ortogonal mot kolonnerna i $A$ om $\hat{\mathbf{x}}$ är minsta kvadratlösningen. (2p)

**4.** (a) Om $A$ är en inverterbar matris, beskriv $\det(A^{-1})$ uttryckt i $\det(A)$. (1p)

(b) Beräkna $A^{-1}$, $\det(A)$, $\det(A^{-1})$ och verifiera att din formel stämmer för matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(4p)

**5.** (a) För vilka värden på parametern $s$ är $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbart då $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ s & 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$? (2p)

(b) Ange lösningarna $\mathbf{x}$ för de $s$ som ekvationen är lösbar. (2p)

VÄND!

## Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

**6**. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om $A$ är en $m \times n$ matris med $m > n$ kan man bilda matrisen $A^T A - AA^T$. (1p)

(b) Om vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vektorer i $\mathbb{R}^3$ så är $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$. (1p)

(c) Om $A$ och $B$ är matriser sådana att $AB = 0$, då måste $A = 0$ eller $B = 0$. (1p)

(d) Om $A$ är en $m \times n$ matris med $m < n$ så har $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oändligt många lösningar. (1p)

**7**. Vilken punkt på planet $x - y - z = 3$ ligger närmast punkten $P_0 = (2, 1, -3)$ och vad är avståndet mellan planet och $P_0$? (4p)

**8**. Betrakta två avbildningar $F$ och $G$ från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$. Avbildningen $F$ innebär en vridning $\dfrac{3\pi}{4}$ moturs kring origo medan $G$ betyder en spegling i $y$-axeln.

(a) Bestäm matrisen för den sammansatta avbildningen som fås om man först vrider och sedan speglar. (3p)

(b) Får man samma resultat som i uppgift (a) om man först speglar och sedan vrider, d.v.s. är de båda avbildningarna kommutativa? (1p)

Lycka till!
Thomas Bäckdahl

| Anonym kod | LMA515C & LMA033B Matematik 2017-06-09 | sid.nummer 1 | Poäng |
|---|---|---|---|
| | | | |

**1.** Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Finn alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ -2x + y + 3z = 2 \\ 4x - 3y - z = 4 \end{cases}$. (3p)

**Lösning:**

**Svar:** ..........................................................................

(b) Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ vara vektorer i planet. Illustrera med en figur räkneregeln $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$. (3p)

**Lösning:**

..........................................................................

(c) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$. (3p)

**Lösning:**

**Svar:** .......................................................................... VÄND!

(d) Avgör om vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ kan skrivas som linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ och ange i så fall den linjärkombinationen. (3p)

**Lösning:**

**Svar:** ..........................................................................

(e) Bestäm $2 \times 2$ matrisen $X$ så att $AXB = C$, då

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Lösning:** (3p)

**Svar:** ..........................................................................