MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2017-06-09 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Adam Malik
ankn 5325

Lösningsförslag LMA515C & LMA033B

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2017 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (15p)

2. Punkterna $A = (1, 3, -2)$, $B = (3, 2, -3)$ och $C = (2, 4, -4)$ är givna.

(a) Bestäm vektorprojektionen av $\overrightarrow{BC}$ på $\overrightarrow{AC}$. (2p)

Lösning: Vi får $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ och $\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Vektorprojektionen är

$$\mathrm{Proj}_{\overrightarrow{AC}}\,\overrightarrow{BC} = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{6}\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(b) **Lösning:** Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$. (2p)

Vi får $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{6}$, $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{6}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3$. Den sökta vinkeln är $\arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|}\right) = \arccos(\frac{1}{2}) = \pi/3$.

(c) Bestäm $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. (2p)

Lösning: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

3. (a) Lös ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ i minsta kvadratmening då $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. (4p)

Lösning: Minstakvadrat-lösningen $\hat{\mathbf{x}}$ löser normalekvationerna $A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$. Vi får $A^TA = \begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$, $\det(A^TA) = 9$, $(A^TA)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 18 \\ -8 \end{bmatrix}$, $\hat{\mathbf{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -4/3 \end{bmatrix}$.

(b) Hur stort blev minstakvadratfelet? (2p)

Lösning: $\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Minstakvadratfelet: $\|\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}\| = \sqrt{\frac{75}{9}} = \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

(c) Kontrollera att felvektorn $A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$ är ortogonal mot kolonnerna i A om $\hat{\mathbf{x}}$ är minsta kvadratlösningen. (2p)

Lösning:

$$(\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{a}_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2+7-12+3}{3} = 0,$$

$$(\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{a}_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{-1+0+4-3}{3} = 0.$$

4. (a) Om A är en inverterbar matris, beskriv $\det(A^{-1})$ uttryckt i $\det(A)$. (1p)

Svar: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

(b) Beräkna A^{-1}, $\det(A)$, $\det(A^{-1})$ och verifiera att din formel stämmer för matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(4p)

Lösning:

$$\left[\, A \mid I \,\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{array}\right]$$

Så $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3/2 & -3/2 & -1 \end{bmatrix}$ och

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \underset{2-1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\det(A^{-1}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3/2 & -3/2 & -1 \end{vmatrix} \underset{2+1}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & -3/2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3/2 & -1 \end{vmatrix} = -1/2.$$

Således stämmer formeln $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

5. (a) För vilka värden på parametern s är $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbart då $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ s & 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$? (2p)

Lösning: Matrisen saknar invers om $0 = \det(A) = -2 - 3s$, så systemet är lösbart om $s \neq -2/3$.

(b) Ange lösningarna $\mathbf{x}$ för de s som ekvationen är lösbar. (2p)

Lösning: $A^{-1} = \dfrac{1}{-2-3s}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -s & -1 \end{bmatrix}$, så $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \dfrac{1}{2+3s}\begin{bmatrix} -12 \\ -2+3s \end{bmatrix}$.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om A är en $m \times n$ matris med $m > n$ kan man bilda matrisen $A^TA - AA^T$. (1p)

Svar: Falskt. A^TA blir en $n \times n$ matris men AA^T blir en $m \times m$ matris så de kan inte subtraheras om $m > n$.

(b) Om vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vektorer i $\mathbb{R}^3$ så är $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$. (1p)

Svar: Sant. Om $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \underset{①\leftrightarrow②}{=} - \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

(c) Om A och B är matriser sådana att $AB = 0$, då måste $A = 0$ eller $B = 0$. (1p)

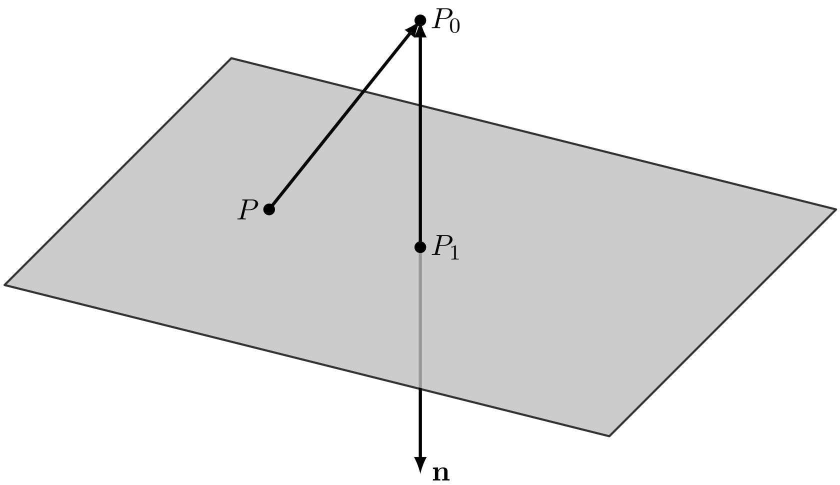
Svar: Falskt. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ger $AB = 0$, men $A \neq 0$ och $B \neq 0$.

(d) Om A är en $m \times n$ matris med $m < n$ så har $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oändligt många lösningar. (1p)

Svar: Sant. Matrisen kan maximalt ha ett pivot element per rad, vilket innebär maximalt m pivot kolonner. Alltså finns minst $n - m > 0$ fria variabler. Fria variabler ger oändligt många lösningar.

7. Vilken punkt på planet $x - y - z = 3$ ligger närmast punkten $P_0 = (2, 1, -3)$ och vad är avståndet mellan planet och P_0? (4p)

Lösning: Låt $P = (x, y, z)$ vara en punkt i planet, som har normal $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Om P_1 är punkten i planet som ligger närmast P_0, så kommer projektionen av $\overrightarrow{PP_0}$ på normalen vara $\overrightarrow{P_1P_0} = \frac{\overrightarrow{PP_0} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}\mathbf{n} = \frac{(x-2) - (y-1) - (z+3)}{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}\mathbf{n} = \frac{x - y - z - 4}{3}\mathbf{n} = -\frac{1}{3}\mathbf{n}$. I sista steget använde vi att P ligger i planet dvs $x - y - z = 3$. Alltså får vi $\overrightarrow{P_1O} = \overrightarrow{P_1P_0} + \overrightarrow{P_0O} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, så koordinaterna för P_1 är $P_1 = (5/3, 4/3, -8/3)$. Avståndet är $\|\overrightarrow{P_1P_0}\| = \frac{1}{3}\|\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\| = 1$.



8. Betrakta två avbildningar F och G från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$. Avbildningen F innebär en vridning $\dfrac{3\pi}{4}$ moturs kring origo medan G betyder en spegling i y-axeln.

(a) Bestäm matrisen för den sammansatta avbildningen som fås om man först vrider och sedan speglar. (3p)

Lösning: Vridning av $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ger $F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ och $F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, så $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ med $A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Speglingen ger $G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, så $G(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ med $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sammansättning med vridning först $G(F(\mathbf{x})) = BA\mathbf{x}$. $BA = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Svar: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) Får man samma resultat som i uppgift (a) om man först speglar och sedan vrider, d.v.s. är de båda avbildningarna kommutativa? (1p)

Lösning: $F(G(\mathbf{x})) = AB\mathbf{x}$, $AB = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \neq BA$.

Svar: Nej, avbildningarna kommuterar inte.

Hoppas det gick bra!
Thomas Bäckdahl

Anonym kod	Lösningsförslag LMA515C & LMA033B 2017-06-09	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Finn alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ -2x + y + 3z = 2 \\ 4x - 3y - z = 4 \end{cases}$. (3p)

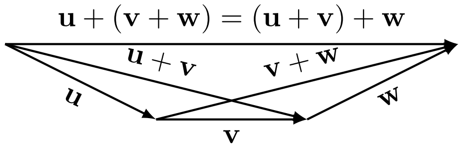
Lösning:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & -1 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Svar: $x = -5 + 4t$, $y = -8 + 5t$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.

(b) Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ vara vektorer i planet. Illustrera med en figur räkneregeln $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$. (3p)

Lösning:



(c) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$. (3p)

Lösning: Utveckling efter andra kolonnen, addition av 2 gånger tredje raden till första raden och utveckling av första raden ger

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-3-2) = 5$$

(d) Avgör om vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ kan skrivas som linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ och ange i så fall den linjärkombinationen. (3p)

Lösning:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{u} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

Systemet är inkonsistent.
Svar: Nej, $\mathbf{u}$ kan inte skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$.

(e) Bestäm 2×2 matrisen X så att $AXB = C$, då

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lösning: Om A och B är inverterbara får vi $AXB = C \Leftrightarrow A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$. $\det(A) = -1$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\det(B) = -1$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ger **Svar:** $X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$. (3p)