MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2017-08-23 kl. 08.30–12.30

Tentamen Telefonvakt: Sebastian Jobjörnsson

ankn 5325

Lösningsförslag LMA515C & LMA033B

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2017 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (15p)

2. Matriserna $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ är givna.

(a) Beräkna A^{-1} och B^{-1}. (4p)

Lösning: $\det A = 2$, $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$[B|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -11 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -11 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 6 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -2 & 6 & -11 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(b) Lös matrisekvationen $AXB = C^T$. (2p)

Lösning: $AXB = C^T \Leftrightarrow A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}C^TB^{-1} \Leftrightarrow X = A^{-1}C^TB^{-1}$.

Svar: $X = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & -3 & 8 \end{bmatrix}$.

3. (a) Förklara vad som menas med en minstakvadratlösning till en ekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (1p)

Svar: Definitionsmässigt är $\hat{\mathbf{x}}$ mistakvadratlösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ om $|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}| \leq |A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$ för alla vektorer $\mathbf{x}$. Dvs. den vektor som minimerar felet $|A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$.

(b) Anpassa med minsta kvadrat metoden $y = a + bt$ till följande mätdata (4p)

t	-1	0	2	3
y	0	2	3	2

.

Lösning: Designmatrisen blir $A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \\ 1 & t_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, mätdata $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ och parametervektorn $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Minstakvadratlösningen $\hat{\mathbf{x}}$ löser normalekvationerna $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{y}$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 14 \end{bmatrix},$$

$$A^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix},$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1}A^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Svar: $a = 5/4$ och $b = 1/2$, alltså $y = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}t$ minimerar minstakvadratfelet.

(c) Hur stort blev approximationsfelet vid $t = 2$? (1p)
Lösning: Vid $t = 2$ ger approximationen $y = 9/4$ istället för mätvärdet $y = 3$. Felet blir således $3/4$.

4. Punkterna $A = (0, 1, -2)$, $B = (2, 2, -3)$ och $C = (1, 3, -1)$ är givna.

(a) Bestäm en ekvation för planet som går genom punkterna A, B och C. (3p)

Lösning: $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Normalen har samma riktning som

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$, så vi kan välja $\mathbf{n} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Då planet går genom punkten A får vi planets ekvation som $(x-0)-(y-1)+(z+2) = 0$.
Svar: $x - y + z = -3$.

(b) Bestäm arean av triangeln med hörn i punkterna A, B och C. (2p)

Lösning: Triangeln har area $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{3}{2}\left|\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(c) Bestäm triangelns vinkel vid punkten A. (2p)

Lösning: Vinkeln vid A är $\arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}\right) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

5. För vilka värden på parametern a är kolonnerna i $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ -2 & 2 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ linjärt beroende? (4p)

Lösning: Matrisen är kvadratisk så determinantkriteriet ger att kolonnerna är linjär beroende omm $0 = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ -2 & 2 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a^2 + 3a - 4 = (a-1)(a+4)$ dvs när $a = 1$ eller $a = -4$.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om A är en 3×3 matris med kolonnerna $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ och $\mathbf{a}_3$ sådana att $4\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2$, så har ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oändligt många lösningar. (1p)

Svar: Sant, $\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$ löser ekvationen för alla $t \in \mathbb{R}$.

(b) Om A, B och C är matriser sådana att $AB = C$ och C har tre rader måste B ha tre rader. (1p)
Svar: Falskt, t.ex. kan A vara en 3×2 matris, B en 2×4 matris och C en 3×4 matris. Då har C tre rader men B har två rader.

(c) Om vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vinkelräta vektorer i $\mathbb{R}^3$ så är $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{v}||\mathbf{u}|$. (1p)
Svar: Sant. Generellt har vi $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{v}||\mathbf{u}| \sin\theta$, där θ är mellanliggande vinkeln, men $\theta = \pi/2$ ger $\sin\theta = 1$.

(d) Om $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är vektorer i $\mathbb{R}^3$ så är vektorn $\mathbf{b} - \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$ är vinkelrät mot vektorn $\mathbf{a}$ (1p)

Svar: Falskt. Kvadraten fattas i nämnaren. T.ex. $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ger

$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}) = 1 - \sqrt{2} \neq 0.$

7. Beräkna minsta avståndet mellan de två linjerna $\mathbf{L}_1$ och $\mathbf{L}_2$, där $\mathbf{L}_1$ är linjen genom $(2, 1, 0)$ parallell med vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{L}_2$ ges av $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = -(z+1)$. (4p)

Lösning: Låt $P_1 = (2, 1, 0)$, $P_2 = (2, 1, -1)$, $\mathbf{v}_1 = \hat{x} + 2\hat{y} + \hat{z}$ och $\mathbf{v}_2 = 3\hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z}$. Då går $\mathbf{L}_1$ genom P_1 och är parallell med $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{L}_2$ går genom P_2 och är parallell med $\mathbf{v}_2$.

Låt P_3 och P_4 vara punkterna på $\mathbf{L}_1$ respektive $\mathbf{L}_2$ som ligger närmast varandra. Då kommer $\overrightarrow{P_3P_4}$ vara vinkelrät mot både $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$, så den är parallell med $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Vektoraddition ger $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \overrightarrow{P_4P_2}$. Vektorerna $\overrightarrow{P_1P_3}$ och $\overrightarrow{P_4P_2}$ är parallella med $\mathbf{v}_1$ respektive $\mathbf{v}_2$, så de är båda vinkelräta mot $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Alltså är $\overrightarrow{P_3P_4}$ projektionen av $\overrightarrow{P_1P_2}$ på $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Det sökta avståndet är

$$s = |\overrightarrow{P_3P_4}| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}.$$

Vi beräknar därför $\overrightarrow{P_1P_2} = -\hat{z}$ och

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\hat{x} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\hat{y} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\hat{z} = -4\hat{x} + 4\hat{y} - 4\hat{z}.$$

Vi får $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = 4$ och $|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2| = 4\sqrt{3}$, så minsta avståndet mellan linjerna är $s = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

8. Betrakta två avbildningar $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ och $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ som ges av

$$F(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 - x_2, x_2), \quad G(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 2x_2 - 2x_3, 2x_1 - x_2 + x_3).$$

(a) Bestäm matrisen för de sammansatta avbildningarna $F \circ G$ och $G \circ F$. (3p)

Lösning: Matrisen för avbildningen F är $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, och matrisen för G är $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, så matrisen för $F \circ G$ är $AB = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -5 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ och matrisen för $G \circ F$ är $BA = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 6I$.

(b) Är sG invers till F för något tal $s \in \mathbb{R}$? (1p)

Svar: Nej, en linjär avbildning kan endast ha invers om dess matris är kvadratisk, så $\frac{1}{6}G$ är inte invers till F trots att $\frac{1}{6}G \circ F$ är enhetsavbildningen. Observera att $F \circ (\frac{1}{6}G)$ inte är inverterbar.

Hoppas det gick bra!
Thomas Bäckdahl

Anonym kod	Lösningsförslag LMA515C & LMA033B 2017-08-23	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Finn alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} x \phantom{{}-2y} + z = 2 \\ 5x - 2y + z = 9 \\ 4x + 2y + 9z = 9 \end{cases}$. (3p)

Lösning:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 & 9 \\ 4 & 2 & 9 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Svar: $x = 2$, $y = 1/2$, $z = 0$.

(b) Beräkna kryssprodukten $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ för vektorerna $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. (2p)

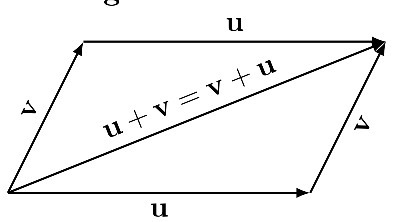
Svar: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$

(c) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. (2p)

Svar: $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 - (4 - 8) = 4$

(d) Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara vektorer i planet. Illustrera med en figur räkneregeln $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$. (2p)

Lösning:



(e) Avgör om vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ kan skrivas som linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och ange i så fall den linjärkombinationen. (3p)

Lösning:

$$[\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & -10 & -20 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Svar: Ja, $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$

(f) Bestäm på parameterform linjen som går genom punkterna $A = (1, 2, 3)$ och $B = (0, 4, 1)$. Avgör också om vektorn $\overrightarrow{BC}$ är vinkelrät mot linjen om $C = (-5, 1, 1)$. (3p)

Lösning: Linjen har riktning $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ och går genom A så linjen ges av

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad \text{med parameter } t \in \mathbb{R}.$$

$\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -1 \neq 0$ så $\overrightarrow{BC}$ är inte vinkelrät mot linjen.