MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2018-08-29 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Sebastian Jobjörnsson ankn 6457
Examinator: Håkon Hoel

MVE520 Linjär algebra
LMA515, Matematik, del C

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2018 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. **(15p)**

2. a) Definiera begreppet inverterbar matris. **(2p)**

b) Beräkna inversen till matrisen **(3p)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Låt B och C vara inverterbara 2×2 matriser där **(3p)**

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finn inversen till matrisen $D = BC^T$.

3. Låt punkterna $A = (1, -1, 0)$, $B = (2, 1, 2)$ och $C = (0, 1, -2)$ vara givna.

a) Beräkna arean till triangeln med hörn A, B och C. **(3p)**

b) Beskriv (med en ekvation) planet Π som går genom punkterna A, B och C. **(2p)**

c) Beräkna minsta avståndet från punkten $P = (1, 2, 3)$ till planet Π. **(2p)**

4. Anpassa med minsta kvadratmetoden en rät linje $y = c_1 + c_2 x$ till punkterna **(3p)**

$$(-2, 3),\ (-1, 1),\ (0, 0) \quad \text{och} \quad (2, -1).$$

5. a) Beskriv vad som menas med att en mängd vektorer $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ är linjärt beroende. **(2p)**

b) Avgör om följande vektorer är linjärt beroende **(3p)**

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

a) Om både $F_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och $F_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ är linjära avbildningar så måste också avbildningen $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ definierad som **(2p)**

$$G(\boldsymbol{x}) = F_2(F_1(\boldsymbol{x})) \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

vara linjär.

b) För tre godtyckliga vektorer i $\mathbb{R}^3$, **(2p)**

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

så gäller följande

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \det([\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]),$$

där $[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$ betecknar 3×3 matrisen med kolonner $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$.

c) Om A, B och C är kvadratiska matriser av samma storlek där A kommuterar med B och B kommuterar med C, så måste A kommutera med C. **(2p)**

d) Om $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ är linjärt oberoende så måste följande matris vara inverterbar: **(2p)**

$$B = [\boldsymbol{a}_1 \ \ (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) \ \ (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3)].$$

(Förtydligande: kolonn nr k i matrisen B är lika med $\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{a}_j$ för $1 \leq k \leq 3$.)

(4p)

7. Beskriv mängden av alla $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ sådana att

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 4 \end{bmatrix}$$

kommuterar.

Lycka till!
Håkon Hoel

Anonym kod	MVE520 Linjär algebra 2018-08-29	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och beräkna:

i. $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c}$, **(1p)**

ii. $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$, **(1p)**

iii. $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$, **(1p)**

iv. och vinkeln mellan $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$. **(1p)**

Lösning:

VÄND!

(b) i. Beräkna matrisprodukten AB där **(2p)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2p)

ii. Låt C, D och E vara rektangulära matriser sådana att CD är en $m \times n$ matris och DE är en $p \times k$ matris. Beskriv storleken till matriserna C och E.

Lösning:

VÄND!

(c) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

i. Beräkna $\det(A)$ **(3p)**

ii. Låt B vara en 4×4 matris med $\det(B) = 3$. Bestäm $\det(ABBA)$. **(2p)**

iii. Låt $C = [\boldsymbol{c}_1 \ \boldsymbol{c}_2 \ \boldsymbol{c}_3]$ vara en 3×3 matris där $\boldsymbol{c}_k$ betecknar matrisens k-te kolonn. Ge en geometrisk tolkning av $|\det(C)|$. **(2p)**

Lösning: