MATEMATIK **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2018-06-08 kl. 08.30–12.30

Tentamen Telefonvakt: Felix Held ankn 5325

Examinator: Håkon Hoel ankn 5381

MVE520 Linjär algebra

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2018 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning sker 2018-06-26 kl. 10-11 i rum MVL14, Chalmers tvärgata 3.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. **(15p)**

2. a) Beskriv vad som menas med att en mängd vektorer $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende . **(1p)**

Lösningsförslag: Vektorerna $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende om ekvationen

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_k v_k = 0,$$

endast har den triviala lösningen $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$. ■

b) För vilka värden $a, b \in \mathbb{R}$ är vektorerna **(3p)**

$$\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ b \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

linjärt oberoende?

Lösningsförslag: Vektorerna är linjärt oberoende om och endast om

$$\det \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ b & 3 & 4 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Sedan

$$\det \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ b & 3 & 4 \end{bmatrix} = a \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + b \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = a + 2 - b,$$

är vektorerna linjärt oberoende om och endast om $b - a \neq 2$. ■

3. En kvadratisk matris A sägs vara en ortogonalmatris om $A^T A = I$.

a) Visa att om A är en ortogonalmatris så är $|\det(A)| = 1$. **(2p)**

Lösningsförslag:

$$\det(A^T A) = \det(I) = 1 \quad \text{och} \quad \det(A^T A) = \det(A)^2 \implies \det(A) = \pm 1.$$

■

b) Visa att matrisen **(2p)**

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{där} \quad \alpha \in [0, 2\pi)$$

är en ortogonalmatris.

Lösningsförslag:

$$\begin{aligned} A_\alpha^T A_\alpha &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^2 \end{bmatrix} \\ &= I. \end{aligned}$$

■

c) Matrisen A_α kan beskrivas geometrisk som en α radianers rotation moturs kring z-axeln följd av en spegling i xy-planet. Ge en geometrisk beskrivning av A_α^T. **(1p)**

Lösningsförslag: A^T är en $-\alpha$ radianers rotation moturs kring z-axelsn följd av en spegling i xy-planet. ■

d) Bestäm $\alpha \in [0, 2\pi)$ sådan att **(2p)**

$$A_\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Lösningsförslag: Sedan

$$A_\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 2 \end{bmatrix},$$

så måste vi bestämma vinkeln $\alpha \in [0, 2\pi)$ som uppfyller $\cos(\alpha) = 0$ och $\sin(\alpha) = -1$. Lösningen är $\alpha = 3\pi/2$. ■

4. a) Definiera begreppet linjär avbildning. **(2p)**

Lösningsförslag: Avbildningen $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är linjär om

$$T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y})$$

och

$$T(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha T(\boldsymbol{x})$$

gäller för alla $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ och $\alpha \in \mathbb{R}$. ■

b) Låt $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ och $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vara de respektive avbildningarna **(2p)**

$$T_1(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} (x_1 - x_2)^2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T_2(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Avgör om T_1 och T_2 är linjära avbildningar (som alltid, motivera svaret).

Lösningsförslag: T_1 är inte linjär sedan

$$T_1\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = T_2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + T_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Avbildningen T_2 är linjär: För alla $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ och $\alpha \in \mathbb{R}$ gäller

$$\begin{aligned} T_2(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &= \begin{bmatrix} (x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3) \\ (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ y_1 - y_2 + y_3 \end{bmatrix} \\ &= T_2(\boldsymbol{x}) + T_2(\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

och

$$T_2(\alpha \boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + 2\alpha x_2 + 3\alpha x_3 \\ \alpha x_1 - \alpha x_2 + \alpha x_3 \end{bmatrix} = \alpha T_2(\boldsymbol{x}).$$

■

5. a) Finn minstakvadratlösningen till det överbestämta ekvationssytemet $Ax = b$ där **(3p)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

och beräkna residualen.

Lösningsförslag: Vi löser normalekvationerna

$$A^T A x = A^T b$$

där

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 15 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A^T b = \begin{bmatrix} -7 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Det ger

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b = \frac{1}{125} \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 16 \end{bmatrix} = \frac{1}{125} \begin{bmatrix} -25 \\ 125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Residualen:

$$|b - Ax| = \left\| \begin{bmatrix} 1 - 4/5 \\ 2 - 9/5 \\ -3 + 17/5 \\ 2 - 12/5 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{5} \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|$$

■

b) På vilket sätt kan minsta kvadratmetodens lösning anses vara bästa approximativa lösning till ekvationssystemet ovan? **(1p)**

Lösningsförslag: Minsta kvadratlösningen x minimerar residualen $|b - Ax|$, dvs

$$|b - Ax| \leq |b - Ay| \qquad \forall y \in \mathbb{R}^2.$$

■

6. Låt S vara parallellogrammen som spänns upp av vektorerna $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

a) Bestäm arean till parallelogrammen S. **(2p)**

Lösningsförslag:

$$\text{area}(S) = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \left| \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right| = 3.$$

■

b) Diagonalerna till S, dvs $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, delar upp parallellogrammen i fyra triangler. Visa att de fyra triangeln har samma area. **(2p)**

Lösningsförslag: Diagonalerna delar upp S i fyra triangler T_1, T_2, T_3 och T_4. Två triangler, som vi betecknar T_1 och T_2, har sidor $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})/2$, $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})/2$ och $\boldsymbol{a}$. De två andra triangeln, som vi betecknar T_3 och T_4 har sidor $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})/2$, $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})/2$ och $\boldsymbol{b}$. Det följer det att för $i = 1, 2, 3, 4$ så är arean lika med

$$\text{area}(T_i) = \frac{|(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})|}{8}$$

dvs de fyra trianglen har samma area.

$\Big($ Även om det inte ingår i uppgiften, låt oss verifiera på ett alternativt sätt att arean till varje triangel är lika med area$(S)/4$: Sedan $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x} = 0$ och $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{x}$ för alla $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ gäller det för $i = 1, 2, 3, 4$ att

$$\text{area}(T_i) = \frac{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})|}{8} = \frac{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|}{4} = \frac{\text{area}(S)}{4}. \quad \Big)$$

■

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

7. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

a) Om A och B är kvadratiska matriser av samma storlek och $\det(A) = 0$ så finns det en vektor $\boldsymbol{x} \neq 0$ som uppfyller ekvationen $AB\boldsymbol{x} = 0$. **(2p)**

Lösningsförslag: Sedan $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 0$ är kolonnerna i matrisen AB linjärt beroende, så det finns en $\boldsymbol{x} \neq 0$ sådan att $AB\boldsymbol{x} = 0$. ■

b) För alla $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ gäller det att **(2p)**

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \frac{|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|^2 - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2}{4}.$$

Lösningsförslag: Från

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|^2 = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = |x|^2 + 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + |\boldsymbol{y}|^2$$

och

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2 = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = |x|^2 - 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + |\boldsymbol{y}|^2$$

följer det att

$$\frac{|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|^2 - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2}{4} = \frac{4\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{4} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}.$$

■

8. För ett godtyckligt par vektorer $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq 0$ i $\mathbb{R}^2$ är $\measuredangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ definierad som vinkeln mellan $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$. En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sägs vara vinkelbevarande om

$$\measuredangle(F(\boldsymbol{x}), F(\boldsymbol{y})) = \measuredangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad \text{för alla} \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq 0,$$

och längdbevarande om

$$|F(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{x}| \quad \text{för alla } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2.$$

a) Visa att den linjära avbildningen **(2p)**

$$F_1\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1\cos(\alpha) - x_2\sin(\alpha) \\ x_1\sin(\alpha) + x_2\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

är längd- och vinkelbevarande för alla $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tips: Börja med att bestämma standardmatrisen till F_1.

Lösningsförslag: Standardmatrisen till F_1 är lika med

$$A = \left[F_1\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \quad F_1\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

För alla $\alpha \in \mathbb{R}$ gäller det att $A^T A = I$ (dvs matrisen är ortogonal), och det följer att

$$|F_1(\boldsymbol{x})|^2 = (A\boldsymbol{x}) \cdot A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T A^T A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T I\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{x}|^2 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ och } \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Och för alla $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq 0$ gäller att

$$\begin{aligned}
\measuredangle(F_1(\boldsymbol{x}), F_1(\boldsymbol{y})) &= \cos^{-1}\left(\frac{F_1(\boldsymbol{x}) \cdot F_1(\boldsymbol{y})}{|F_1(\boldsymbol{x})||F_1(\boldsymbol{y})|}\right) \\
&= \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{x}^T A^T A \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}\right) \\
&= \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}\right) \\
&= \measuredangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).
\end{aligned}$$

Konklusion: F_1 längdbevarande och vinkelbevarande för alla $\alpha \in \mathbb{R}$ ■

b) Ange värdena för $\alpha \in \mathbb{R}$ så att den linjära avbildningen **(2p)**

$$F_2\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

är längdbevarande och värdena för $\alpha \in \mathbb{R}$ så att avbildningen är vinkelbevarande.

Lösningsförslag: Sedan $|F_2(\boldsymbol{x})| = |\alpha||\boldsymbol{x}|$, är F_2 längdbevarande omm $\alpha = \pm 1$. F_2 är vinkelbevarande för alla $\alpha \neq 0$ sedan för alla $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq 0$ gäller att

$$\begin{aligned}
\measuredangle(F_2(\boldsymbol{x}), F_2(\boldsymbol{y})) &= \cos^{-1}\left(\frac{F_2(\boldsymbol{x}) \cdot F_2(\boldsymbol{y})}{|F_2(\boldsymbol{x})||F_2(\boldsymbol{y})|}\right) \\
&= \cos^{-1}\left(\frac{\alpha^2 \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{\alpha^2 |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}\right) \\
&= \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}\right) \\
&= \measuredangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).
\end{aligned}$$

■

9. Bestäm minsta avståndet mellan planet **(4p)**

$$\Pi : 2x + 3(y+1) + z = 0$$

och linjen

$$L : x = 1 + 2t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = 3 + 5t.$$

Lösningsförslag: Linjen L är parallell med vektorn $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ och vektorn $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en normalvektor till planet Π. Sedan $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$, är $\boldsymbol{n}$ också normalvektor till linjen L, och det betyder att L ligger i ett plan som är parallellt med Π. Kortaste avståndet mellan linjen och planet fås genom att (1) plocka ut två godtyckliga punkter $\boldsymbol{x} \in L$ och $\boldsymbol{y} \in \Pi$, och (2) beräkna längden till normalkomponenten till $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$, dvs $|\mathrm{proj}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})|$.

Genom att välja $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ får vi $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ och

$$|\mathrm{proj}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})| = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})|}{|\boldsymbol{n}|} = \sqrt{14}.$$

■

Lycka till!
Håkon Hoel

Anonym kod	MVE520 Linjär algebra 2018-06-08	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna matris-vektorprodukten **(2p)**

$$\begin{bmatrix} 8 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lösningsförslag:

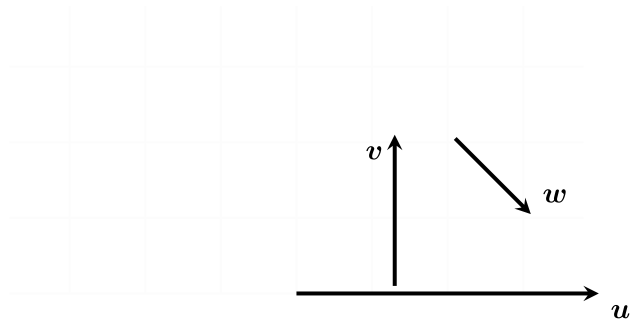
$$\begin{bmatrix} 8 & -1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8-(-1)+6 \\ 3-5+7 \\ 4-9+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

■

(b) I figuren nedanför är vektorerna $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$ ritade. Ange approximativa värden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sådana att **(2p)**

$$\boldsymbol{u} + \alpha \boldsymbol{v} + \beta \boldsymbol{w} = 0.$$

Motivera lösningen grafiskt.



Lösningsförslag: $\alpha \approx -2 \pm 1/2$, $\beta \approx -4 \pm 1$. ■

(c) Finn skärningspunkten mellan planen **(3p)**

$$\Pi_1 : x - 2y + 3z = 1, \quad \Pi_2 : 3x - 4y + z = 7, \quad \text{och} \quad \Pi_3 : -x + 2y + z = 3.$$

Tips: Bilda ett ekvationssystem från ekvationerna för de respektive planen.

Lösningsförslag: Skärningspunkten är lösning till ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Gausselimination:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

■

(d) Beräkna projektionen av vektorn $\boldsymbol{b}$ på vektorn $\boldsymbol{a}$ för **(2p)**

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Lösningsförslag:

$$\mathrm{Proj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a} = \frac{27}{9}\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

■

(e) i. Invertera matrisen **(3p)**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Lösningsförslag:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3/2 & 1/2 \end{array}\right],$$

som ger

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

■

ii. Låt **(3p)**

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lös matrisekvationen

$$(B + 2I)XA = C$$

där X är en 2×3 matris av obekanta.

Lösningsförslag:

$$(B + 2I)X = CA^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3/2 & 0 \\ -2 & 5/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

och sedan $X = (B + 2I)^{-1}CA^{-1}$ med

$$(B + 2I)^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

får vi

$$X = (B + 2I)^{-1}\begin{bmatrix} -1 & 3/2 & 0 \\ -2 & 5/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -5 & 7 & -1/2 \\ -5 & 6 & -3/2 \end{bmatrix}$$

■