MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Datum: 190612 kl. 8.30–12.30
Telefonvakt: Mattias Lennartsson
5325

MVE520 Matematik

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 23 poäng på Del 1. Bonuspoäng från duggor 2019 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (17p)

2. (a) Anpassa med minsta kvadrat metoden en rät linje $y = kx + m$ till punkterna (4p)

$$(1, 2), \quad (2, 1), \quad (3, 4) \quad \text{och} \quad (4, 3).$$

Vi vill bestämma k och m så att $y = kx + m$.

Den normal ekvationen är $(A^TA)\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ där $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}$.

Eftersom kolumnerna av A är linjärt oberoende, är A^TA inverterbar. Alltså $\mathbf{x} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$.

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, så är $A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 10 \end{bmatrix}$,

$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$ och $(A^TA)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 30 \end{bmatrix}$.

Alltså $\mathbf{x} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 12 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Svar: Linjens ekvationen är $y = \frac{3}{5}x + 1$.

(b) Vad blir approximativt värdet av y när $x = \frac{5}{3}$? (1p)

$y = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} + 1 = 2$.

3. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Visa att matriserna A och B är inverterbara och beräkna inverserna A^{-1} och B^{-1} till A och B respektive. (5p)

$\det(A) = 2(-1) = -2$ och $\det(B) = -2$ så är A och B inverterbara.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Lös ekvationen $AXB^T = C$. (2p)

$$X = A^{-1}C(B^T)^{-1} = A^{-1}C(B^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} & -4 \end{bmatrix}$$

4. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara linjär avbildningen som ges av

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 3x_1 + x_2 - 2x_3)$$

(a) Bestäm standard matrisen till T. (1p)

$T(\mathbf{e}_1) = (1, 3)$, $T(\mathbf{e}_2) = (-2, 1)$ och $T(\mathbf{e}_3) = (1, -2)$.

Standardmatrisen är $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

(b) Beräkna $T(2, 1, -1)$. (1p)

$$T(2, 1, -1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(c) Bestäm alla $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^3$ så att $T(\mathbf{u}) = (1, -1)$. (3p)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{5}{7} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{5}{7} \end{array}\right]$$

Alltså $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7}t - \frac{3}{7} \\ \frac{5}{7}t - \frac{5}{7} \\ t \end{bmatrix}$ för alla $t \in \mathbb{R}$

5. (a) Låt A vara en 2×2-matris. Beskriv $\det A^T$ och $\det(-A)$ uttryck i $\det A$. (2p)

$\det(A^T) = \det A$ och $\det(-A) = (-1)^2 \det A = \det A$.

(b) Verifiera formlerna i a) då $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. (2p)

$\det A = 3$, $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, alltså $\det A^T = 3 = \det A$.

$-A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\det(-A) = (-1)^2 - (-2) = 3 = \det A$.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

1. En ortonormal bas till $\mathbb{R}^3$ är en mängd av 3 linjärt oberoende, vinkelräta enhetsvektorer. Visa att vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

är en ortonormal bas till $\mathbb{R}^3$. (4p)

$||\mathbf{v}_1|| = 1$, $||\mathbf{v}_2|| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$ och $||\mathbf{v}_3|| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$.
Alltså är $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ enhetsvektorer.
$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$, och $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$.
$\det[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3] = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \neq 0$ så är vektorerna linjärt oberoende.
$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ är en mängd av 3 linjärt oberoende vinkelräta enhetsvektorer, alltså är det en ortonormal bas till $\mathbb{R}^3$.

2. Bestäm skärningen och vinkeln mellan planen $\mathcal{P}_1 : 2x - 3y + z = 2$ och $\mathcal{P}_2 : x - y + z = 1$. (4p)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Låt $z = t$. Skärning mellan $\mathcal{P}_1$ och $\mathcal{P}_2$ är en linje med ekvation $x = -2t + 2$, $y = -t + 1$, $z = t$.
Vinkeln α mellan planen är vinkeln mellan normalvektorer till $\mathcal{P}_1$ och $\mathcal{P}_2$
En normal vektor till plan $\mathcal{P}_1$ är $\mathbf{n}_1 = (2, -3, 1)$ och en normal vektor till plan $\mathcal{P}_2$ är $\mathbf{n}_2 = (1, -1, 1)$.
$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 6$, $||\mathbf{n}_1|| = \sqrt{14}$ och $||\mathbf{n}_2|| = \sqrt{3}$ så är $\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{14}\sqrt{3}}$ så är $\alpha = \cos^{-1}(\frac{6}{\sqrt{14}\sqrt{3}})$

3. Avgör om följande påstående är sanna eller falska, samt motivera ditt svar.

(a) Om A och B är två matriser sådana att $AB = 0$, då måste $A = 0$ eller $B = 0$. (2p)

False.
Om $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. $A \neq 0$ och $B \neq 0$ men $AB = 0$.

(b) Om A är en kvadratisk matris och $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har oändliga många lösningar så är kolumnerna av A linjärt beroende. (2p)

Rätt Om As kolumner är linjärt oberoende så är $\det A \neq 0$ och $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en lösning.

Lycka till!
Nancy

Anonym kod	MVE520 Matematik 190612	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Lå $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,1)$ och $C(1,1,1)$ vara fyra punkter i rummet.

i. Bestäm en ekvation till planet $\mathcal{P}$ som passar genom O, A och B. (3p)

$\vec{OA} = (1,0,0)$, $\vec{OB} = (0,1,1)$

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

En normal vektor till planet är $(0,-1,1)$

Plans ekvation: $-y + z = 0$

Svar: $-y + z = 0$ ....

ii. Tillhör C planet $\mathcal{P}$? (1p)

$-1 + 1 = 0$. Alltså $A \in \mathcal{P}$

Svar: Ja ....

iii. Visa att $OACB$ är en parallellogram. (1p)

$\vec{OA} = (1,0,0)$, $\vec{BC} = (1,0,0)$. Eftersom $\vec{OA} = \vec{BC}$ så är $OACB$ en parallellogram.

iv. Beräkna arean till parallellogramen $OACB$. (2p)

Arean$=||\vec{OA} \times \vec{OB}|| = ||-\mathbf{j} + \mathbf{k}|| = \sqrt{2}$.

Svar: Arean$=\sqrt{2}$ ....

(b) Låt

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 3y + z = 0 \\ z = -2 \end{cases}$$

vara ett ekvationssystem. Bestäm x med hjälp av Cramers regel. (3p)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2(2+3)+3}{9} = -\frac{7}{9}$$

(c) För vilka värde a är vektorerna nedan linjärt oberonede? (3p)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$$

Vektorerna är linjärt oberoende omm $\det[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3] \neq 0$.

$$\det[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3] = \begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a \end{vmatrix} = a(a+1) - 2a = a^2 - a = a(a-1) \neq 0 \text{ då } a \neq 0 \text{ och}$$

$a \neq 1$.

Svar: Vektorerna är linjärt oberoende då $a \neq 0$ och $a \neq 1$. ....

(d) Välj det rätta svaret.

i. En ekvation till planet med riktningsvektorer $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ och $\mathbf{v} = (0, 1, 2)$ som passar genom punkten $A(2, 0, 0)$ är (1p)

☐ $x + 2y - z - 2 = 0$ ☐ $5x + 2y + z - 10 = 0$ ☐ $5x - 2y + z - 10 = 0$

ii. Standardmatrisen till linjäravbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som är en spegling genom x-axeln är: (1p)

☐ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(1p)

iii. Om $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 2$ så gäller att $\det \begin{bmatrix} 2b & a & c \\ -2e & -d & -f \\ 2h & g & i \end{bmatrix}$ är lika med

☐ 4 ☐ -4 ☐ -1 ☐ 1

(1p)

iv. Linjerna $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ och $\begin{cases} x = s \\ y = 0 \\ z = s + 1 \end{cases}$ är

☐ parallella ☐ skeva ☐ vinkelräta mot varandra