MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 190828 kl. 8.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Felix Held 5325

MVE520/LMA515 Matematik

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 23 poäng på Del 1. Bonuspoäng från duggor 2019 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (16p)

2. Låt

$$\begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ -x + 2y = 4 \\ x - \ \ y = 0 \end{cases}$$

vara ett ekvationssystem.

(a) Visa att systemet är olösbart. (3p)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5/3 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -7/3 \end{array}\right]$$

Alltså är systemet olösbart.

(b) Beräkna en minstakvadratlösning till ekvationssystemet. (4p)

Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$. $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $A^T b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix}$

$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

Normalekvation: $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix}$

Eftersom $A^T A$ är inverterbar ($\det(A^T A) = 18 - 4 = 14 \neq 0$) så gäller att

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 \end{bmatrix}$

3. Låt $A = (1, 1, 0)$, $B = (2, 0, 2)$ och $C = (1, 1, 1)$ vara tre punkterna i rummet.

(a) Beräkna arean till triangeln med hörn A, B och C. (3p)

$\vec{AB} = (1, -1, 2)$, $\vec{AC} = (0, 0, 1)$. $\vec{AB} \times \vec{AC} = (-1, -1, 0)$

Arean$=\frac{||\vec{AB} \times \vec{AC}||}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) Beräkna en ekvation till planet ($\mathcal{P}$) som går genom A, B och C. (2p)

En normal vektor till planet $\mathcal{P}$ är $\vec{AB} \times \vec{AC} = (-1, -1, 0)$. En ekvation till planet är $-1(x - 1) - (y - 1) = 0$ som är $-x - y + 2 = 0$.

(c) Tillhör punkten $D = (2, 1, 0)$ planet $\mathcal{P}$? (1p)

$-2 - 1 + 2 = -1 \neq 0$ så D tillhör inte planet $\mathcal{P}$.

(d) Beräkna volymen till parallellepipeden som spänns upp av vektorerna AB, AC och AD. (2p)

$\vec{AB} = (1, -1, 1)$, $\vec{AC} = (0, 0, 1)$ och $\vec{AD} = (1, 0, 0)$.

Volymen av parallellepipeden är lika med normen av determinanten av matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$. Alltså är volymen lika med 1.

4. Låt $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ vara linjär avbildningen som ges av

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_3, x_2 - x_4)$$

(a) Bestäm standard matrisen till T. (1p)

Standardmatrisen är $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(b) Beräkna $T(2, 1, 0, 1)$. (1p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(c) Bestäm alla $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^4$ sådana att $T(\mathbf{u}) = (2, 1)$. (2p)

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$ låt $x_3 = s$ och $s_4 = t$. Alltså $x_1 = s + 2$, $x_2 = t + 1$,

$x_3 = s$ och $x_4 = t$ så $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} s+2 \\ t+1 \\ s \\ t \end{bmatrix}$ där $s, t \in \mathbb{R}$.

5. (a) Vilket av följande uttryck är alltid sant för kvadratiska matriser A och B? (1p)

i. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

ii. $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

(b) Verifiera det uttrycket som du har valt i (a) för matriserna (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 2$, $\det(B) = -2$ $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\det(AB) = 2 - 6 = -4 = \det(A)\det(B)$.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

6. Visa att om A^n är invertervar så A är inverterbar. (2p)
Om A^n är inverterbar så $\det A^n \neq 0$.
$\det A^n = \det A \det A \cdots \det A = (\det A)^n$.
Om $(\det A)^n \neq 0$ så gäller att $\det A \neq 0$ alltså är A inverterbar.

7. Antag att A är inverterbar. Förenkla uttrycket $A^T(A^{-1})^T$. (2p)
$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$.

8. Låt $(\mathcal{L})$ vara en linje i rummet med ekvation $\begin{cases} x &= 2t+1 \\ y &= 4t \\ z &= 2t-1 \end{cases}$.

Bestäm

(a) en linje som är parallell till $(\mathcal{L})$, (2p)
En linje som är parallell till $\mathcal{L}$ har samma riktningsvektor $\mathbf{u} = (2,4,2)$ som $\mathcal{L}$.
En sådan linje kan vara $\begin{cases} x &= 2t \\ y &= 4t \\ z &= 2t \end{cases}$.

(b) en linje som är vinkelrät mot $(\mathcal{L})$ och skär $(\mathcal{L})$, (2p)
En riktningsvektor till en sådan linje är vinkelrät mot $\mathbf{u} = (2,4,2)$. Låt $\mathbf{v} = (0,-2,4)$.$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 - 8 + 8 = 0$ så $\mathbf{v}$ är vinkelrät mot $\mathbf{u}$. En linje som är vinkelrät mot $\mathcal{L}$ kan vara $\begin{cases} x &= 1 \\ y &= -2s \\ z &= 4s-1 \end{cases}$ Linjernan skär varandra i punkten $(1,0,-1)$.

(c) ett plan som är vinkelrät mot $(\mathcal{L})$. (2p)
Ett normalvektor till ett plan som är vinkelrät mot $\mathcal{L}$ är riktningsvektor $\mathbf{u}$ till $\mathcal{L}$. En ekvation till sådant plan kan vara $2x + 4y + 2 = 0$

9. Bestäm vinkeln mellan planen (2p)

$$\mathcal{P}_1 : x + 2y + z - 1 = 0 \quad \text{och} \quad \mathcal{P}_2 : y + z + 1 = 0$$

Vinkeln mellan $\mathcal{P}_1$ och $\mathcal{P}_2$ är samma som vinkeln α mellan deras respektive normalvektorerna.
En normal vektorn till $\mathcal{P}_1$ är $\mathbf{n}_1 = (1,2,1)$.
En normal vektorn till $\mathcal{P}_2$ är $\mathbf{n}_2 = (0,1,1)$.
$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{||\mathbf{n}_1|| ||\mathbf{n}_2||} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Alltså $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Lycka till!
Nancy

Anonym kod	MVE520/LMA515 Matematik 190828	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna inversen till matrisen $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (3p)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7/3 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7/3 & -2/3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/7 & -3/7 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/7 & 2/7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/7 & 3/7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/7 & -3/7 & 0 \end{array}\right]$$

Svar: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/7 & 2/7 & 0 \\ -2/7 & 3/7 & 1 \\ 2/7 & -3/7 & 0 \end{bmatrix}$ ....

(b) För vilka värde av a är följande vektorerna linjärt oberoende? (4p)

$$v_1 = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\det \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 2 \end{bmatrix} = a \det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ a & 2 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix} = a^2 - (2-a) = a^2 + a - 2 = (a-1)(a+2) \neq 0$. Alltså är vektorerna linjärt oberoende för alla $a \neq 1$ och $a \neq -2$.

Svar: $a \neq 1$ och $a \neq -2$. ....

(c) Finn skärningspunkt mellan planen (3p)

$$\mathcal{P}_1 : x - 2y + 3z = 1 \quad \mathcal{P}_2 : 2x - y + z = 2 \quad \mathcal{P} : y - z = 4$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Svar: Skärningspunkt är punkten $(3, 10, 6)$ .... VÄND!

(d) Låt $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$ och $\mathbf{w} = \begin{bmatrix}-1\\-2\\3\end{bmatrix}$ vara tre vektorer i rummet.

Beräkna

i. $\mathbf{u} - \mathbf{v} + 2\mathbf{w}$ (1p)

Svar: $\mathbf{u} - \mathbf{v} + 2\mathbf{w} = \begin{bmatrix}-3\\-5\\6\end{bmatrix}$ ....

ii. $\mathbf{u} \cdot (2\mathbf{v} - \mathbf{w})$ (1p)

$$\mathbf{u} \cdot (2\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}5\\4\\-1\end{bmatrix} = 5 + 0 - 1 = 4$$

Svar: $\mathbf{u} \cdot (2\mathbf{v} - \mathbf{w}) = 4$ ....

iii. vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ (2p)

$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{||u||||v||} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Svar: $\frac{\pi}{6}$ ....

iv. projektionvektorn av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ (2p)

$\mathbf{proj_v u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||^2}\mathbf{v} = \frac{3}{6}(2,1,1) = (1, 1/2, 1/2)$

Svar: $\mathbf{proj_v u} = \begin{bmatrix}1\\1/2\\1/2\end{bmatrix}$ ....