MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**

Chalmers tekniska högskola | Datum: 190321 kl. 14.00–18.00

Tentamen | Telefonvakt: Maximilian Thaller 5325

MVE520 Matematik

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamen. Bonuspoäng från duggor 2018 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (20p)

2. Anpassa med minsta kvadrat metoden en rät linje $y = kx + m$ till punkterna (4p)

$$(-1, 2), \quad (0, 3), \quad (1, 3) \quad \text{och} \quad (2, 2).$$

Vi vill bestämma k och m så att $y = kx + m$.

Den normal ekvationen är $(A^TA)\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ där $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}$. Eftersom kolumnerna av A är linjärt oberoende, är A^TA inverterbar. Alltså $\mathbf{x} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$.

$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, så är $A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$,

$A^TA = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ och $(A^TA)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$.

Alltså $\mathbf{x} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,5 \end{bmatrix}$.
Svar: Linjens ekvationen är $y = 2,5$.

3. Låt A och B vara två kvadratiska matriser.

(a) Beskriv $\det(AB)$ uttryckt i $\det(A)$ och $\det(B)$. (1p)

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

(b) Visa att "AB är inverterbar om och endast om båda A och B är inverterbara". (2p)
Ledning: Använd (a)

AB är inverterbara $\Leftrightarrow \det(AB) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A)\det(B) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ och $\det(B) \neq 0 \Leftrightarrow$ båda A och B är inverterbara.

(c) Beräkna AB, $\det(AB)$, $\det(A)$, $\det(B)$ och verifiera att din formel i (a) stämmer för matriserna (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $\det(AB) = -6 + 5 = -1$.
$\det(A) = 1$, $\det(B) = -1$.
Så är $\det(AB) = \det(A)\det(B) = -1$.

4. Låt $\mathbf{u} = (2, 3, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$ och $\mathbf{w} = (0, 1, -3)$.

(a) Bestäm skalärerna a och b så att $\mathbf{u} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$. (2p)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ så är } a = 2 \text{ och } b = -1.$$

(b) Förklara varför $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är linjärt beroende. (1p)

Eftersom $\mathbf{u}$ är en linjär kombination av $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ så är $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ linjärt beroende.

5. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara linjär avbildningen som ges av

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 5x_2 - x_3, -3x_1 - x_2 + x_3, 3x_1 + 2x_2 - x_3)$$

(a) Bestäm standard matrisen till T. (1p)

$T(\mathbf{e}_1) = (3, -3, 3)$, $T(\mathbf{e}_2) = (5, -1, 2)$ och $T(\mathbf{e}_3) = (-1, 1, -1)$.

Standardmatrisen är $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) Beräkna $T(2, 1, -1)$. (1p)

$$T(2, 1, -1) = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(c) Avgör om det finns $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ så att $T(\mathbf{u}) = (2, 1, -1)$. (3p)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Omöjligt! Systemet är olösbar dvs det finns ingen vektor $\mathbf{u}$ så att $T(\mathbf{u}) = (2, 1, -1)$.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

1. Avgör om linjen $(l): \frac{2-x}{2} = y+1 = \frac{z-3}{6}$ är parallell till planet $(\mathcal{P}): 2x-2y+z-3 = 0$. Om är så fallet, beräkna avståndet mellan (l) och $\mathcal{P}$. Om så inte är fallet, beräkna koordinaterna av skärning punkt mella (l) och $(\mathcal{P})$. (3p)

En riktningsvektor till linjen (l) ges av $\mathbf{u} = (-2, 1, 6)$. En normal vektor till planet $(\mathcal{P})$ ges av $\mathbf{n} = (2, -2, 1)$.
$\mathbf{u}{\cdot}\mathbf{n} = -2(2)+(-2)(1)+6(1) = -4-2+6 = 0$, så är planet och linjen parallella. Alla punkter på linjent har samma avståndet till planet. En punkt på linjen ges av $P = (2, -1, 3)$.
Avståndet mellan planet och P är:

$$\frac{|2(2)-2(-1)+3-3|}{\|n\|} = \frac{6}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{6}{3} = 2.$$

2. Bestäm skalärerna a och b så att $A^2 = 0$ där $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$. (3p)

$$A^2 = AA \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+a & 2+b \\ 2a+ab & a+b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Alltså } \begin{cases} 4+a=0 \\ 2+b=0 \\ 2a+ab=0 \\ a+b^2=0 \end{cases}$$

Med första ekvationen av systemet får man $a = -4$ och med andra $b = -2$. Vi sätter in värdena a och b i tredje och fjärde ekvationerna: $2(-4) + (-4)(-2) = -8 + 8 = 0$ och $-4 + (-2)^2 = 0$. Ekvationerna stämmer. Alltså $a = -4$ och $b = -2$.

3. Avgör om följande påstående är sanna eller falska, samt motivera ditt svar.

(a) En kvadratisk matris kallas symetrisk om $A^T = A$. Låt B vara en kvadratisk matris. $B + B^T$ och $B^T B$ är symetriska matriser. (2p)
$(B+B^T)^T = B^T + (B^T)^T = B^T + B = B + B^T$.
$(B^T B)^T = B^T (B^T)^T = B^T B$.
Alltså $B + B^T$ och $B^T B$ är symmetriska matriser och påstående är sant.

(b) Ett linjärt system $Ax = b$ där A är en 3×4-matris kan inte ha en entydig lösning. (2p)
Sant eftersom reducerade trappstegsmatrisen av A har minst en frivariabel.

(c) Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella vektorer så är $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$. (2p)
$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \sin\theta$ där θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Sant.
Eftersom $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella så är vinkeln mellan dem antingen 0 eller π. I båda fall $\sin\theta = 0$ så är $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = 0$. Alltså $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$.

Lycka till!
Nancy

Anonym kod	MVE520 Matematik 190321	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm en ekvation till planet som passar genom $A(1,1,-1)$, $B(2,0,2)$, och $C(0,-2,1)$. (3p)

$\vec{AB} = (1,-1,3)$, $\vec{AC} = (-1,-3,2)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-2+9) - \mathbf{j}(2+3) + \mathbf{k}(-3-1) = 7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

En normal vektor till planet är $(7,-5,-4)$

Plans ekvation: $7(x-1) - 5(y-1) - 4(z+1) = 0 \Leftrightarrow 7x - 5y - 4z = 6$

Svar: $7x - 5y - 4z = 6$ ....

(b) Beräkna inversen till matrisen $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

Svar: $D^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ ....

Lös ekvationen $AX - 3X = B$ där $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (5p)

$(A-3I)X = B$. Om $A-3I$ är inverterbar så är $X = (A-3I)^{-1}B$.

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = D$$

så är $A-3I$ inverterbar och $(A-3I)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Svar: $X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ....

VÄND!

(d) För vilka värde a har systemet $\begin{cases} 2x - 3y & = 2 \\ 2y - az & = 1 \\ -x - y - z & = 2 \end{cases}$ bara en lösning. (4p)

Systemet har bara en lösning om matrisen $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -a \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ är inverterbar.

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -a \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-a)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = a(-2-3) - 4 = -5a - 4 \neq 0$. Så a måste vara skild från $-\frac{4}{5}$

Svar: Systemet har bara en lösning för alla $a \neq -\frac{4}{5}$ ....

(d) Välj det rätta svaret.

i. Låt $\mathcal{P}$ planet definierat av $x - 2y + 2z - 1 = 0$. En enhetsnormal vektor till $\mathcal{P}$ är: (1p)

☐ $(1, -2, 2)$ ☐ $(-2, 0, 1)$ ☐ $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ ☐ $(-\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3})$

ii. En parametrisering av linjen som går genom punkten $A(1, 2, 3)$ och med riktningsvektor $\mathbf{u} = (1, 2 - 1)$ är: (1p)

☐ $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 2 \\ z = -t + 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ ☐ $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 2 \\ z = 3t - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ ☐ $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t + 2 \\ z = 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

iii. Låt $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$ och $\mathbf{a} = (4, -1, 2)$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^3$. $\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$ är lika med: (1p)

☐ $(20, -5, 10)$ ☐ $(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7})$ ☐ $(\frac{20}{\sqrt{7}}, -\frac{5}{\sqrt{7}}, \frac{10}{\sqrt{7}})$

iv. Vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{u} = (-1, 1, -2)$ och $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$ är: (1p)

☐ $\frac{\pi}{6}$ ☐ $\frac{5\pi}{6}$ ☐ $\frac{\pi}{3}$ ☐ $\frac{2\pi}{3}$

v. Arean av triangeln OAB där $A = (2, 3)$ och $B = (1, 2)$ är: (1p)

☐ $0,5$ ☐ 7 ☐ $3,5$ ☐ 1

vi. Volymen av parallellepipeden spänns upp av $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är: (1p)

☐ -2 ☐ 2 ☐ -1 ☐ 2

vii. Standardmatrisen till linjäravbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som är en spegling genom y-axeln är: (1p)

☐ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

viii. Om $\det(A) = -1$, $\det(F) = 2$ och $\det(R) = -3$ så är $\det(FARFAR)$ lika med: (1p)

☐ 6 ☐ -36 ☐ -6 ☐ 36