Kapitel 3 - Determinant

Från Kapitel 2: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ är inverterbar omm $\det A = ad - bc \neq 0$.

För 3×3-matriser: Låt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $a_{11} \neq 0$. A är inverterbar

omm reducerad trapstegsmatris till A är enhetsmatrisen.

Om vi reducerar A får vi:

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & 0 & a_{11}\Delta \end{pmatrix}$$

där $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

$$= a_{11} \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Δ kallas determinant av A och A är inverterbar omm $\det A \neq 0$.

<u>Def:</u> Låt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ vara en n×n-matris. Matrisen A_{ij} är

definierad som delmatrisen av A som man får med att ta bort rad i

och kolumn j.

Determinanten av A är talet det A definierad som:

$$\det A = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}.$$

<u>Ex:</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\det A = 1\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 0\det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$= 1(0-2) - 2(-1-2) + 0 = -2 + 6 = 4.$$

Determinanten i definitionen och exemplet med avseende på första raden.
Vi skriver $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ istället av $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Definition Talet $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ kallas (i,j)-kofaktor till A.

Sats: Låt A vara en $n \times n$-matris. $\det A$ kan beräknas med avseende på vilken rad eller kolumn som helst.

på rad i: $\det A = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \cdots + a_{in} C_{in}$

på kolumn j: $\det A = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \cdots + a_{nj} C_{nj}$.

Anmärkning: Man brukar välja raden eller kolumnen med flest nollor.

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

flest nollor

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\left(1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) = 2\left(1(1+1) - 2(1-2)\right) = 8$$

med avseende på andra kolumn

med avseende på 1st rad

Def: En $n \times n$-matris kallas övertriangulär om endast talen ovanför och i diagonalen är nollskilda och undertriangulär om endast talen under och i diagonalen är nollskilda. En matris kallas triangulär om den är antingen över- eller undertriangulär. En $n \times n$-matris kallas diagonal matris om endast diagonalelementen är nollskilda.

Ex:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

övertriangulär

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

undertriangulär.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonal matris

Sats: Om A är en triangulär eller diagonal matris så är determinanten lika med produkten av diagonalelementen.

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det A = 2\cdot(-1)(1)\cdot 4 = -8$ $\qquad \det B = 2\cdot 2\cdot 0 = 0$ $\qquad \det C = (-2)(-1) = 2.$

Eftersom det är lättare att beräkna en triangulär matris, Kan man transformera en matris A till en annan triangulär matris med rad eller Kolumn operationer.

Rad operationer

Låt A vara en $n\times n$-matris

1. Om B fås från A genom att addera en multipel av en rad av A till en annan rad av A så är $\det B = \det A$

2. Om B fås från A genom att byta 2 rader så är $\det B = -\det A$.

3. Om B fås från A genom att multiplicera en rad med K så är $\det B = K \det A$.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ① -2 $\sim$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \det A = \det B.$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det C = -\det B$

C är en triangulär matris $\Rightarrow \det C = 1\cdot 3\cdot 5 = 15$

$\Rightarrow \det B = -\det C = -15$

$\Rightarrow \det A = \det B = -15.$

Kolumn operationer

Sats: $\det A^T = \det A$ för alla $n \times n$-matriser.

Rad operationer på en matris A blir kolumn operationer på matrisen A^T.

Dvs man kan göra också kolumn operationer på en matris för att transformera den till en triangulär matris.

1. Om B fås från A genom att addera en multipel av en kolumn till en annan kolumn av A så är $\det B = \det A$.
2. Om B fås från A genom att byta 2 kolumner så är $\det B = -\det$
3. Om B fås från A genom att multiplicera en rad med k så är $\det B = k\det$

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

med avseende på kolumn 1.

$$= 4 \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 4(-6-1) = -28.$$

med avseende på råd 3

Sats:
1. Om A har en rad eller en kolumn med bara nollor så är $\det A = 0$
2. Låt A och B vara $n \times n$-matriser. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
   ($\det(A+B) \neq \det A + \det B$ in general).
3. A är inverterbar omm $\det A \neq 0$
4. $\det A \neq 0$ omm kolumner av A är linjärt oberoende.

Important

Sats: Cramers regel:

Låt A vara en $n\times n$ inverterbar matris. För vorje $b\in\mathbb{R}^n$, den unik lösningen $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ till $Ax=b$ är:

$$x_i=\frac{\det A_i(b)}{\det A}.$$

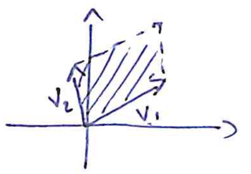
Ex: Låt $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ och $b=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$. Lös $Ax=b$ med Cramers regel

$\det A = 2\cdot 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow A$ inverterbar.

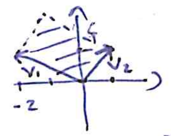
$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}}{2}=-\frac{1}{2} \quad \text{och} \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}}{2}=\frac{5}{2}. \Rightarrow x=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

Area och Volym

* Låt $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Arean av parallellogramen spänns upp av v_1 och v_2 är lika med $|\det A|$ där $A=(v_1\ v_2)$.



Ex: $v_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$ $v_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$



Area av parallellogramen i figuren till höger är

$$\left|\det\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right| = |-2-1| = 3$$

* Låt $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$. Volym av parallellepiped är lika med $|\det A|$ där $A=(v_1\, v_2\, v_3)$

Ex: $v_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ $v_2=\begin{pmatrix}0\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$ $v_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -3\end{pmatrix}$. De tre vektorerna bestäm en parallellepiped med volym $=\left|\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}\right| = |1\cdot 3\cdot -3| = |-9| = 9.$

Sats: * Låt $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning med standardmatris. Om S är en parallellogram i $\mathbb{R}^2$ så gäller

$$\text{area av } T(S) = |\det A|\cdot \text{area}(S)$$

* Låt $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning med standard matris A och S en parallellepiped i $\mathbb{R}^3$ så gäller

$$\text{Volym av } T(S) = |\det A|\cdot \text{volym}(S).$$

Ex: Är vektorerna $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ linjärt oberoende?

Lösning:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 2\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{andra}\\ \text{kolumn}}}{=} -1\begin{vmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix} = -1\left(2(-1)-2(-1)\right) = -1\cdot 0 = 0$$

vektorerna är linjärt beroende.

Ex: Är matrisen $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ inverterbar?

$$\det A = \begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix} \begin{matrix}(-1)\\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot -1\cdot 2 = -4 \neq 0$$

(triangulär matris)

så är A inverterbar.

Cramersregel

Cramersregel är ett annat sätt för att lösa en matrisekvation $Ax=b$ där A är en $n\times n$ inverterbar matris.

Låt A en $n\times n$-matris och b en $n\times 1$-matris (kolumnvektor). Matrisen $A_i(b)$ är matrisen man får genom att ersätta kolumn i av A med b.

ex: $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow A_3(b)=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}$.

Låt $A=(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)$ (a_i kolumner av A), $I=(e_1\ e_2\ \cdots\ e_n)$ (e_i kolumner av I) och $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ lösning till $Ax=b$.

$$A\cdot I_i(x) = A\,(e_1\ e_2 \cdots \underset{\substack{\uparrow\\ \text{på kolumn } i}}{x} \cdots e_n) = (Ae_1\ Ae_2 \cdots Ax \cdots Ae_n) = (a_1\ a_2 \cdots b \cdots a_n) = A_i(b)$$

$$\Rightarrow \det(A_i(b)) = \det(A\,I_i(x)) = \det A\cdot \det I_i(x) = \det A\cdot x_i \Rightarrow x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A}.$$

Ex: Låt $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning definierad som:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}$$

1. Bestäm standard matrisen till T.
2. Låt S vara parallellogramen spänns upp av vektorerna $v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Beräkna arean av S och T(S).

Lösning: 1. $T(e_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $T(e_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ är

standardmatrisen till T.

2. Arean av $S = \left|\det\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right| = |-3-4| = 7.$

Arean av $T(S) = |\det A| \cdot \text{area}(S) = \left|\det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right| \cdot 7 = |0+6| \cdot 7 = 42.$

Övning: Samma uppgifter som föregående exempel med $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2 \\ -x_3 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$ och S är parallellepippeden spänns upp av

$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Beräkna volym av S och T(S))