Föreläsning 5

2019-02-04

Linjära Ekvationssystem

En linjär ekvation med n variabler $x_1, \dots, x_n$ är en ekvation som ser ut som

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

där $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ inte alla nolla. $a_1, \dots, a_n$ kallas koefficienter

När $n=2$, beskriver ekvationen $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$ en linje i planet.

När $n=3$, beskriver ekvationen $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$ ett plan i rummet.

När $b=0$ kallas ekvationen "en homogen ekvation"

Ett linjärt ekvationsystem är en mängd av linjära ekvationer.

ex:
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

3 ekvationer
4 variabler

Låt $\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_n \end{cases}$ vara ett system. En lösning till detta system är en följd av nummer $s_1, \dots, s_n$ sådan att $a_{i1} s_1 + \dots + a_{in} s_n = b_n$ till varje $i = 1, \dots, m$. En lösning skrivs $(s_1, \dots, s_n)$.

Ett linjärt system kan ha :
- ingen lösning (Inkonsistent system)
- En lösning
- eller oändligt mång lösningar

$\Big\}$ konsistent.

För att lösa ett linjärt system andvänds matrisnotation och en algoritm kallas Gauss elimination eller Gauss-Jordan metod.

En matris är en ruta med tal. En matris med m rader och n kolumner kallas mxn-matris.

Ex: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 4x3-matris.

När man löser ett system börjar man med att konvertera systemet till en matris. Matrisen består av siffror som motsvarar koefficienterna för samtliga variabler dä, en kolumn representera en variabel och en rad representerar en ekvation.

Ex: $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$ ← första ekvationen, ← andra ekvationen.

Koeff. för x; Koeff. för y

Matrisen som används för att representera ett linjärt system kallas systemmatris eller totalmatris (augmented matrix).

Exempel på en lösning av ett ekvationssystem.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 6 \end{cases} \quad (1) \; (-2) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -4 & 6 \end{array}\right) \; (1) \; (-2)$$

Steg 1: Behåll x_1 i första ekvationen och eliminera x_1 från de andra ekvationerna.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_2 = 6 & \div 2 \\ -3x_2 - 6x_3 = -12 & \div -3 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \div 2 \\ \div -3 \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_2 = 3 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \quad (-1) \; (-1) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \; (-1) \; (-1)$$

Steg 2: Behåll x_2 i andra ekvationen och eliminera det från de första och tredje ekvationerna genom att använda den andra ekvationen.

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 = 6 \\ x_2 \quad = 3 \\ 2x_3 = 1 \quad \div 2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \div 2$$

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 = 6 \\ x_2 \quad = 3 \\ x_3 = \frac{1}{2} \quad (-1) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) (-1)$$

Steg 3: Behåll x_3 i tredje ekvationenen och använd den ekvationen för att eliminera x_3 i första och andra ekvationen.

$$\begin{cases} x_1 \quad = 11/2 \\ x_2 \quad = 3 \\ x_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$S = \left\{ \left(\frac{11}{2}, 3, \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Tillåtna elementära rad operationer

1. Byta plats på rader.
2. Multiplicera en rad med en icke-noll tal
3. Addera en multipel av en rad till en annan rad.

Övning: Lös systemet $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ -2x - 4y = 1 \end{cases}$ med matrisnotation.

Trappstegsmatris (Row echelon form)

En trappstegsmatris är en matris som uppfyller följande egenskaperna:

1. Alla rader bestående av endas nollor är under alla rader som inte består av endast nollor.
2. Om en rad inte består av endast nollor, är det första nollskilda elementet 1. Detta elementet kallas pivotelementet (leading one).
3. Pivotelementet i varje rad är strikt till höger om pivotelemente i raderna ovanför den.

Reducerad trappstegsmatris (Reduced Row echelon form)

En reducerad trappstegsmatris är en trappstegsmatris som uppfyller följande egenskapen .

4. Om en kolumn innehåller ett pivotelement, är alla de andra enlementen nollor.

Ex: Vilka av följande matriser är en trappstegsmatris eller en reducerad trappstegsmatris?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Def: En pivotposition i en matris A är positionen i A som motsvarar en pivotelement. En pivotkolumn är en kolumn i A som innehåller en pivotposition

Ex: I exempel på sidor 2-3, Matrisen $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 9 \\ -1 & \boxed{1} & -1 & -3 \\ 2 & -1 & \boxed{-4} & 6 \end{pmatrix}$ reduceras till

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 11/2 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1/2 \end{pmatrix}$$

3 pivotelementer

$\Rightarrow$ 3 pivotpositioner $\Rightarrow$ De tre första kolumner är position kolumner.

Vi kommer att gå igenom algoritmen för att reducera en matris via exempel under föreläsningen. Med den här algoritmen kan man läsa direkt lösningen till ett linjärt system. Till exempel: Systemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$$

kan skrivas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 9 \end{array}\right)$$

som kan reduceras till

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Det motsvarande systemet är

$$\begin{cases} x_1 - 5x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Alltså $x_1 = 5x_3 + 1$, $x_2 = -x_3 + 4$, $x_3 \in \mathbb{R}$ är en lösning till systemet. x_3 kallas en frivariabel.

<u>Anmärkning</u>: Kolumnen som inte är en pivotkolumn motsvarar en frivariabel.

<u>Ex:</u>

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} & \uparrow & & \uparrow & \end{array} \end{array}$$

Frivariabler.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + 3x_4 &= -5 \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ En lösning är:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2s \\ x_2 = t \\ x_3 = -5 - 3s \\ x_4 = s \\ x_5 = 2 \end{cases} \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

<u>Sats</u> Ett linjärt system är konsistent om och endast om den sista kolumn av den motsvarande matrisen inte är en pivotkolumn.

<u>Ex:</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftarrow \text{olösbar} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ konsistent.}$$