1.3 Vektorekvation

En matris som har bara en kolumn kallas en kolumn vektor, eller en vektor.

Ex: $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$

Vektorerna i $\mathbb{R}^2$ (i planet) och vektorerna i $\mathbb{R}^3$ (i rummet) som vi har sett i Kapitel 12 (Stewart) ska representeras som kolumn vektorer från och med nu och alla räkneregler och operationer på vektorer stämmer.

Varje punkt i $\mathbb{R}^2$ (respektiv $\mathbb{R}^3$) bestäms med två (respektiv tre) koordinater, alltså ska vi identifiera vektorer i $\mathbb{R}^2$ med punkter i $\mathbb{R}^2$ och vektorer i $\mathbb{R}^3$ med punkter i $\mathbb{R}^3$, och vi tar bort symbolen "$\rightarrow$".

En vektor i $\mathbb{R}^n$ $(n>0)$ är en kolumn vektor med n element

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

nollvektorn i $\mathbb{R}^n$ är vektorn $\vec{0} = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ n nollor.

Räkneregler: Låt u, v, w vara tre vektorer i $\mathbb{R}^n$ och c, d skalär.

1. $u+v = v+u$
2. $(u+v)+w = u+(v+w)$
   $= u+v+w$
3. $u+0 = 0+u = u$
4. $u+(-u) = -u+u = 0$
   där $-u = (-1)u$.
5. $c(u+v) = cu+cv$
6. $(c+d)u = cu+du$
7. $c(du) = (cd)u$
8. $1 \cdot u = u$.

Linjära kombinationer

Låt $v_1, \ldots, v_p$ i $\mathbb{R}^p$ och $c_1, \ldots, c_p$ skalär. Vektorn

$$y = c_1v_1 + \cdots + c_pv_p$$

kallas en linjär kombination av $v_1, \ldots, v_p$ med vikt $c_1, \ldots, c_p$

Ex: Låt $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Vektorn $3\vec{u} - 2\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ är en linjär kombination av $\vec{u}$ och $\vec{v}$ med vikt 3 och -2.

Ex: Är $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en linjär kombination av $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösning: Om $\vec{b}$ är en linjär kombination av $\vec{u}$ och $\vec{v}$, finns det c_1 och c_2 så att $\vec{b} = c_1\vec{u} + c_2\vec{v}$. Dvs

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ 3c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_1 + c_2 \\ c_1 + 3c_2 \end{pmatrix}$$

Alltså $\begin{cases} c_1 = -1 \\ 2C_2 + C_2 = 2 \\ C_1 + 3C_2 = 3 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 & -1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} -3 \end{matrix}$

$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \end{array}\right) \leftarrow$ systemet är olösbar, dvs b är inte en linjär kombination av $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

Anmärkning Ekvationen $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n = \vec{b}$ kallas en vektor ekvation och kan skrivas i matrisnotation som här

$$(\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \cdots \ \vec{u}_n \mid b)$$

Def: Låt $v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$. Mängden av alla linjära kombinationer av $v_1, \ldots, v_p$ betecknas Span$\{v_1, \ldots, v_p\}$ och kallas delmängden till $\mathbb{R}^n$ spanns upp av $v_1, \ldots, v_p$. Span $\{v_1, \ldots, v_p\} = \{c_1v_1 + \cdots + c_pv_p \mid c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{R}\}$.

Geometrisk beskrivning

Låt $v \in \mathbb{R}^3$, Span$\{v\}$ är linjen med riktningsvektor v och passar genom origo.

Låt $u, v \in \mathbb{R}^3$. Om $u = kv$, är Span$\{u,v\}$ linjen med riktningsvektor u eller v och passar genom origo. Om $u \neq kv$, är Span$\{u,v\}$ planet som innehåller vektorerna u, v och origo.