1.4 Matrisekvation.

Låt A vara en $m\times n$-matris och $a_1, \dots, a_n$ kolumner av A. Låt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^n$. Produkten Ax är definierad som linjär kombination av $a_1, \dots, a_n$ med vikt $x_1, \dots, x_n$, dvs.

$$Ax = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n$$

Ex: Låt $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Ax = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+3-0 \\ -4-3-2 \\ -2+3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sats Låt A $m\times n$-matris, $a_1, \dots, a_n$ kolumner av A och $b \in \mathbb{R}^m$.

$Ax = b$ kallas matrisekvation och kan skrivas som en vektorekvation

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = b \qquad \left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$$

som kan skrivas som $\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n & b \end{pmatrix}$. (total matris).

Dvs, lösningmängden till $Ax = b$ är samma som lösningmängd till $x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b$ som är samma som lösningmängd till $(a_1 \cdots a_n \; b)$.

Konsekvens: $Ax = b$ är lösbar om och endast om b är en linjärkombination av kolumner av A.

Ex: Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Lös ekvationen $Ax = b$ där $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Lösning: Vi vill kolla om b är en linjär kombination av $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dvs vi vill lösa totalmatrisen $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Alltså $b = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ex: För vilka $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ är ekvationen $Ax=b$ lösbar där $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Lösning: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & b_1 \\ -1 & 2 & b_2 \\ 2 & 1 & b_3 \end{array}\right) (1)\ (-2) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & b_1 \\ 0 & 5 & b_1+b_2 \\ 0 & -5 & b_3-2b_1 \end{array}\right) (1) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & b_1 \\ 0 & 5 & b_1+b_2 \\ 0 & 0 & b_3-2b_1+b_1+b \end{array}\right)$

Ekvationen är lösbar om och endast om $b_3 - 2b_1 + b_1 + b_2 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{b_3 - b_1 + b_2 = 0}$

Sats Låt A vara en $m \times n$-matris. Följande påstående är ekvivalenta:

1. För varje b i $\mathbb{R}^m$, har ekvationen $Ax=b$ en lösning
2. Varje b i $\mathbb{R}^n$ är en linjär kombination av A:s kolumner
3. Kolumner av A spanns upp $\mathbb{R}^m$. (Varje $b \in \mathbb{R}^m$ tillhör Span(kolumner av A)
4. A har en pivotposition i varje rad.

Räknereglerna: 1. $A(u+v) = Au + Av$ där A $m \times n$-matris, $u, v \in \mathbb{R}^n$ och c skalär

2. $A(cu) = c(Au)$

1.5 Homogent linjärt system

Ett linjärt system är homogen om alla ekvationerna är homogena.

Ex: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

Ett homgent linjärt system är alltid lösbar. Det har nollvektorn som lösning.
Det kallas den trivial lösningen

Ex: I föregående exempel $\begin{cases} 2\cdot 0 + 3\cdot 0 - 4\cdot 0 = 0 \\ 0 - 3\cdot 0 + 3\cdot 0 = 0 \end{cases}$

Ett homogent linjärt system har antigen en lösning eller oändligt många lösningar.

Ex: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & +3 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \\ 3 & -6 & 9 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} (-2) & (-3) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Låt $x_2 = t$ och $x_3 = s$ $\Rightarrow$ $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 2x_2 + 3x_3$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 2t + 3s$$

$$\begin{cases} x_1 = 2t + 3s \\ x_2 = t \\ x_3 = s \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$ är lösning till systemet.

<u>Anmärkning</u>: Sista kolomnen av matrisen är alltid noll i ett homogent system, alltså, vi behöver inte skriva det:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$