1.7 Linjärt oberoende

Låt $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$, och $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R}$. Vektorerna är linjärt oberoende om ekvationen

$$c_1 v_1 + \dots + c_p v_p = 0$$

har bara den triviala lösningen, dvs $c_1 = c_2 = \dots = c_p = 0$

Ex: Låt $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Är $\{v_1, v_2, v_3\}$ linjärt oberoende?

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

Ex: Samma fråga för $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = -t \\ c_2 = -t \\ c_3 = t \end{cases}$$

Alltså v_1, v_2, v_3 är inte linjärt oberoende. Vi säger att de är linjärt <u>beroende</u>.

Anmärkning: 1. En vektor v är linjärt oberoende omm (om och endast om) $v \neq 0$

2. Två vektorer är linjärt oberoende omm de inte är parallella.

3. En mängd $S = \{v_1, \ldots, v_p\}$ av vektorer i $\mathbb{R}^n$ är linjärt beroende omm det finns minst en vektor v_j i S så att v_j är en linjär kombination av alla andra vektorer i S.

<u>Ex:</u> 1. $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $v = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ är linjärt beroende för $v = -2u$

(u och v är parallella)

2. $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ är linjärt beroende eftersom

$w = u + v$

<u>Sats:</u> Låt $v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$.

Om $p > n$ så är $v_1, \ldots, v_p$ linjärt beroende.

<u>Ex:</u> $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ är linjärt beroende $(p = 3, n = 2)$

<u>Sats:</u> Om (minst) en av $v_1, \ldots, v_p$ är nollvektorn så är $v_1, \ldots, v_p$ linjärt oberoende.

<u>Ex:</u> Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Kolumner av matrisen A är linjärt beroende eftersom en kolumn är nollvektorn.